САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

\+ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ И НА ПОСТРОЕНИЕ

8

К заданиям учебника
Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова

ГЕОМЕТРИЯ

А. А. Белова

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ

из учебника

ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов
Л.С. Атанасяна и др.
(*М.: Просвещение*)

+ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

+ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

8 класс

Москва • «ВАКО» • 2012

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Б43

Белова А.А.

Б43 Подробный разбор заданий из учебника по геометрии: 8 класс. – М.: ВАКО, 2012. – 160 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-408-00572-7

Издание, написанное практикующим педагогом, содержит справочный материал, алгоритмы решения типовых задач, а также подробный разбор абсолютно всех заданий из учебника по геометрии для 7–9 классов Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение), включая задачи повышенной трудности.

Поможет родителям и гувернерам школьников проверить уровень усвоения детьми учебного материала, объяснить непонятное, привить им навыки самопроверки и обучить решению задач.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

Учебно-методическое пособие

Белова Анна Александровна

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ
авторов Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)
8 класс

Налоговая льгота -
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 05.07.2011.
Формат 70×100/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,5. Тираж 5000 экз. Заказ № 2134

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области
Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru
Телефон 8 (495) 988-63-87, факс 8 (496) 726-54-10

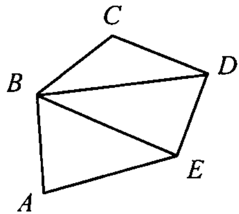
ISBN 978-5-408-00572-7

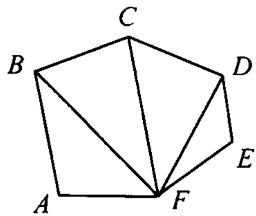
Оглавление

Глава V.
Четырехугольники

§ 1 Многоугольники

363.





ΔABE; ΔEBD; ΔBCD. ΔABF; ΔBFC; ΔCFD; ΔDFE.

364. Используя стандартную формулу учебника, найдем:

а) $S_5 = 180 \cdot (5 - 2) = 540°$; **б)** $S_6 = 180° \cdot (6 - 2) = 720°$;

в) $S_{10} = 180° \cdot (10 - 2) = 1440°$.

Ответ: 540°, 720°, 1440°.

365. Предположим, что выпуклый многоугольник имеет x сторон. Тогда:

а) если каждый его угол равен 90°, то

$180° \cdot (x - 2) = 90° \cdot x$, откуда $180° \cdot x - 360° = 90 \cdot x$;

$180° \cdot x - 90° \cdot x = 360°$; $90° \cdot x = 360°$; $x = 4$;

б) если каждый его угол равен 60°, то

$180° \cdot (x - 2) = 60° \cdot x$ или $180° \cdot x - 360° = 60° \cdot x$;

$120° \cdot x = 360°$; $x = 3$;

в) если каждый его угол равен 120°, то

$180° \cdot (x - 2) = 120° \cdot x$; $60° \cdot x = 360°$; $x = 6$;

г) если каждый его угол равен 108°, то

$180° \cdot (x - 2) = 108° \cdot x$, откуда $72° \cdot x = 360°$; $x = 5$.

Ответ: **а)** 4; **б)** 3; **в)** 6; **г)** 5.

366. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник. $P_{ABCD} = 8$ см $= 80$ мм; $AD > AB$ на 5 мм; $AD > BC$ на 4 мм; $AD > CD$ на 3 мм.
Пусть $AD = x$, тогда $CD = x - 3$, $BC = x - 4$; $AB = x - 5$.
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$; $80 = x - 5 + x - 4 + x - 3 + x$;
$92 = 4x$; $x = 23$.
Значит $AD = 23$ мм; $CD = 20$ мм; $BC = 19$ мм; $AB = 18$ мм.

Ответ: 18; 19; 20; 23.

367. a см – первая сторона четырехугольника, тогда $(a - 8)$ см - вторая сторона, $(a + 8)$ см – третья сторона; $3 \cdot (a - 8)$ см – четвертая сторона. Мы знаем, что периметр равен 66 см, отсюда: $a + (a - 8) + (a + 8) + 3\ (a - 8) = 66$; $a + a - 8 + a + 8 + 3a - 24 = 66$ или $6a = 90$; $a = 15$.

Ответ: 15 см; 7 см; 23 см; 21 см.

368. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник. По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника $(n - 2) \cdot 180° = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$. По условию $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, значит $\angle A = 360° : 4 = 90°$.

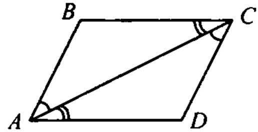
Ответ: 90°.

369. Мы знаем, что $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Тогда
$\angle A + \angle B + \angle C = 360° - \angle D$
или $\angle A + \angle B + \angle C = 360° - 135° = 225°$.
По условию $\angle A = \angle B = \angle C$, значит,
$\angle A = \angle B = \angle C = 225° : 3 = 75°$.

Ответ: 75°.

370. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник.
$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 2 : 4 : 5$.
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, пусть $\angle A = x$, тогда $\angle B = 2x$, $\angle C = 4x$, $\angle D = 5x$, значит $x + 2x + 4x + 5x = 360°$; $12x = 360°$; $x = 30°$.
Отсюда
$\angle A = 30°$, $\angle B = 2 \cdot 30° = 60°$, $\angle C = 4 \cdot 30° = 120°$, $\angle D = 5 \cdot 30° = 150°$.

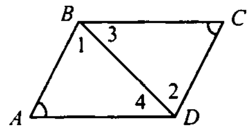
§ 2 Параллелограмм и трапеция



371. а) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по стороне и прилежащим углам ($\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle CAD$, AC – общая). Значит $BC = AD$.

Т.к. $\angle BAC = \angle ACD$ – накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, следовательно $BC \parallel AD$.

Т.к. $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, по первому признаку параллелограмма $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.



б) $AB \parallel CD$ (по условию), значит $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие); т.к. сумма углов треугольника равна $180°$, то $\angle 3 = \angle 4$.

$\Delta ABD = \Delta CBD$ по стороне и прилежащим углам (BD – общая, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$). Значит $AB = CD$.

$AB \parallel CD$ и $AB = CD$, следовательно по первому признаку параллелограмма $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.

372. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм.

а) $AD > AB$ на 3 см.

Если $AB = x$, то $AD = x + 3$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е. $48 = 2 \cdot (x + (x + 3))$; $2x = 21$; $x = 10{,}5$ см;

$AB = CD = x = 10{,}5$ см; $AD = BC = x + 3 = 13{,}5$ см.

б) $AD > AB$ на 7 см ($AD - AB = 7$).

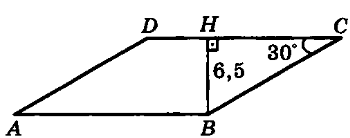
Если $AB = x$, то $AD = x + 7$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е. $48 = 2 \cdot (x + (x + 7))$; $2x = 17$; $x = 8{,}5$ см; $AB = CD = x = 8{,}5$ см;

$AD = BC = x + 7 = 15{,}5$ см.

в) $AD > AB$ в 2 раза.

Если $AB = x$, то $AD = 2x$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т. е. $48 = 2 \cdot (x + 2x)$; $3x = 24$; $x = 8$ см;

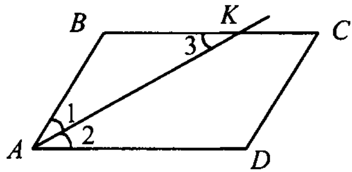
$AB = CD = x = 8$ см; $AD = BC = 2x = 16$ см.



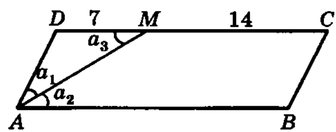
373. По условию $BH \perp CD$; $\angle BCH = 90°$, значит, ΔBCH – прямоугольный. В прямоугольном треугольнике катет (BH), лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, т. е. $CB = 2BH = 6{,}5$ см $\cdot\ 2 = 13$ см. Периметр $ABCD$ равен 50 см, т. е. $AB + DC + CB + AD = 50$, но $CB = AD = 13$ см, значит, $AB + DC = 50 - (CB + AD)$, $AB + DC = 50 - 26 = 24$. Тогда получаем: $AB = DC = 12$ см.

<u>Ответ:</u> $AB = DC = 12$ см; $AB = BC = 13$ см.

374. $ABCD$ – параллелограмм, значит $BC \parallel AD$ и $\angle 2 = \angle 3$ (накрест лежащие). $\angle 1 = \angle 2$ (по свойству биссектрисы), значит и $\angle 1 = \angle 3$, т.е. ΔABK – равнобедренный. Значит $AB = BK = 15$ см, а т. к. $AB = CD$, то $CD = 15$ см. $BC = BK = 15 + 9 = 24$ см. $P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 24) = 2 \cdot 39 = 78$ см.

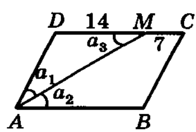


375. По условию биссектриса $\angle A$ делит противоположную сторону параллелограмма на отрезки $DM = 7$ см и $MC = 14$ см. Имеем:



$\angle a_1 = \angle a_2$ (т. к. AM – биссектриса $\angle DAB$), $\angle a_2 = \angle a_3$ (т. к. эти углы накрест лежащие при пересечении $DC \parallel AB$ секущей AM). Отсюда следует, что $\angle a_1 = \angle a_3$ и ΔADM – равнобедренный, $AD = DM = 7$ см. Точка M лежит на стороне DC: $MC = 14$ см; $DC = AB = DM + MC$, $DC = 21$ см. $P_{ABCD} = 2 \cdot (7 + 21)$ см $= 56$ см.

Возможен другой вариант. Биссектриса $\angle DAB$ пересекает сторону DC в точке M и делит ее на отрезки $DM = 14$ см и $MC = 7$ см. Выше было доказано, что ΔADM – равнобедренный, значит, $AD = DM = 14$ см. $DC = DM + MC = 14$ см $+ 7$ см $= 21$ см. $P_{ABCD} = 2 \cdot (14 + 21)$ см $= 70$ см.



376. а) $\angle A = 84°$; по свойству углов параллелограмма: $\angle A = \angle C = 84°$; $\angle B = \angle D$; т. к. $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle B = 180° - 84° = 96°$, следовательно, $\angle D = 96°$.

<u>Ответ:</u> 84°, 96°, 84°, 96°.

б) $\angle A - \angle B = 55°$; $\begin{cases} \angle A - \angle B = 55° \\ \angle A + \angle B = 180° \end{cases}$; $\begin{cases} \angle A = 55° + \angle B \\ (55° + \angle B) + \angle B = 180° \end{cases}$;

$\begin{cases} \angle A = 55° + \angle B \\ 2\angle B = 125° \end{cases}$; $\begin{cases} \angle A = 117°30' \\ \angle B = 62°30' \end{cases}$; $\angle A = \angle C = 117°30'$.

Ответ: 117°30′, 62°30′, 117°30′, 62°30′.

в) $\angle A + \angle C = 142°$;
по свойству параллелограмма: $\angle A = \angle C$, следовательно:
$\angle A = \angle C = 142° : 2 = 71°$; $\angle A + \angle B = 180°$ (свойство параллелограмма); $\angle B = 180° - 71° = 109°$, $\angle D = \angle B = 109°$.

Ответ: 71°, 109°, 71°, 109°.

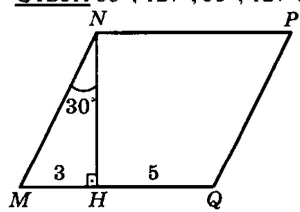
г) $\angle A = 2\angle B$; по свойству параллелограмма: $\angle A + \angle B = 180°$, $2\angle B + \angle B = 180°$; $3\angle B = 180°$; $\angle B = 60°$, $\angle D = \angle B = 60°$, $\angle A = 2\angle B = 120°$; $\angle C = \angle A = 120°$.

Ответ: 120°, 60°, 120°, 60°.

д) если $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$. $\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180°$.
$16° + 37° + \angle D = 180°$; $\angle D = 127°$, $\angle B = \angle D = 127°$;
по свойству параллелограмма: $\angle A + \angle B = 180°$; $\angle A + 127° = 180°$, $\angle A = 53°$, $\angle C = \angle A = 53$.

Ответ: 53°, 127°, 53°, 127°.

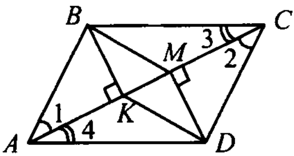
377. По условию, точка H находится на стороне MQ, $MQ = MH + HQ = 8$ см. ΔMNH – прямоугольный (т. к. $NH \perp MQ$), $\angle MNH = 30°$, значит, MH (катет) равен $\frac{1}{2}MN$ (MN – гипотенуза): $MN = PQ = 6$ см. $\angle M = 60°$ (т. к. ΔMNH – прямоугольный). $\angle N = \angle Q = 180° - \angle M = 120°$.



Ответ: 8 см, 6 см, 60°, 120°.

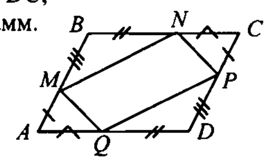
378. Решение приведено в учебнике.

379. Рассмотрим ΔABK и ΔCDM.



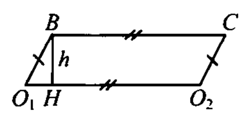
$AB = CD$; $AB \| CD$ (по 1-му признаку параллелограмма);
AC – общая, следовательно
$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие углы при $AB \| CD$ и секущей $\angle C$), значит, $\Delta ABK = \Delta CDM$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $BK = MD$ (из определения равных треугольников).
Рассмотрим ΔCBM и ΔADK:
$AD = CB$; $AD \| CB$ (по 1-му признаку параллелограмма);
AC – общая, следовательно, $\angle 4 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \| BC$ и секущей AC), следовательно, $\Delta ADK = \Delta CBM$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $KD = BM$;
$BK = MD$; $KD = BM$, значит, $BMDK$ – параллелограмм, ч.т.д.

380. $BC = BN + NC = DQ + QA = AD$; $BC = AD$;
$AB = AM + MB = PC + DP = DC$; $AB = DC$;
следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.



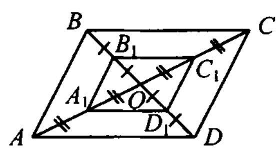
Тогда по свойству параллелограмма
$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
ΔAMQ и ΔCPN по 2 сторонам и углу между ними ($AM = \angle CP$, $\angle AQ = \angle CN$, $\angle A = \angle C$), значит $MQ = NP$.
$\Delta MBN = \Delta QPD$ по 2 сторонам и углу между ними ($MB = DP$, $BN = QD$, $\angle B = \angle D$), следовательно, $MN = QP$;
$MQ = NP$, $MN = QP$, значит $MNPQ$ – параллелограмм, ч.т.д.

381. По условию $O_1A = O_2B$;



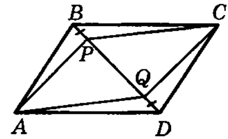
$AB = O_1O_2$, значит ABO_2O_1 – параллелограмм и $AB \| O_1O_2$.
$AH = h$ – высота параллелограмма,
$R \le h \le 0$, где R – радиус колеса. Если $h = R$, то ABO_1O_2 – прямоугольник, если $h = 0$, то AB и O_1Q_2 лежат на одной прямой.

382. $ABCD$ – параллелограмм, значит по свойству диагоналей параллелограмма: $AO = OC$, $BO = OD$;

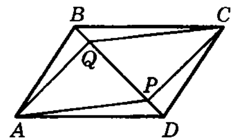


$A_1O = \dfrac{1}{2}AO$ и $C_1O - \dfrac{1}{2}OC$, следовательно, $A_1O = C_1O$, $B_1O = \frac{1}{2}OB$ и $D_1O = \frac{1}{2}OD$, т. е. $B_1O =$ $= D_1O$; $B_1D_1 \cap A_1C_1 = O$, $A_1O = C_1O$, $B_1O = D_1O$, следовательно: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм, ч.т.д.

383. Рассмотрим два варианта.



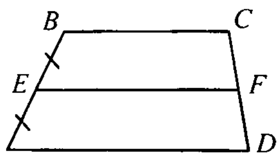
1) Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$; $\angle ABD = \angle BDC$ (как накрест лежащие углы), $BP = QD$ (по условию). Отсюда следует, что $\Delta ABP = \Delta QCD$ (по первому признаку равенства треугольников). Поэтому $AP = CQ$. Так же доказывается равенство ΔBCP и ΔADQ и, следовательно, $PC = AQ$. В четырехугольнике $APCQ$ противоположные стороны попарно равны ($AP = CQ$; $AQ = PC$), значит, это параллелограмм.



2) Точка Q лежит на прямой BD между точками B и P. По условию, $BP = QD$. $BP = BQ + QP$; $QD = PD + QP$. Отсюда следует, что $BQ = PD$. Исходя из доказанного в I варианте, четырехугольник $APCQ$ - параллелограмм.

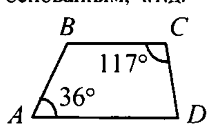
384. Решение приведено в учебнике.

385. Решение приведено в учебнике.



386. Пусть $\angle E$ - середина AB. Проведем прямую $EF \| AD \| BC$. Точка F – середина CD по т. Фалеса. Докажем, что EF – единственный. Через точки E и F можно провести только одну прямую (аксиома), т. е. отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции $ABCD$ параллелен основаниям, ч.т.д.

387. $AD \| BC$, $\angle A + \angle B = 180°$;
$36° + \angle B = 180°$;
$\angle B = 144°$; $\angle C + \angle D = 180°$;
$117° + \angle D = 180°$; $\angle D = 63°$.



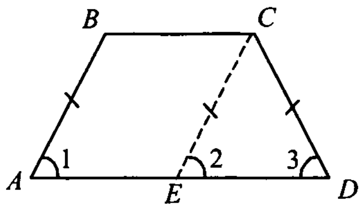
<u>Ответ:</u> 144°, 63°.

388. <u>**Дано:**</u> $AB = CD$.

<u>**Доказать:**</u>

1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$,

2) $AC = BD$.

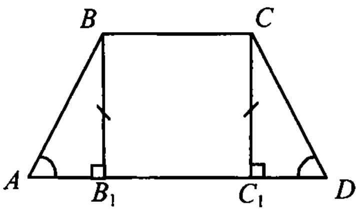


<u>**Доказательство.**</u> Проведем $CE \parallel AB$, $ABCE$ – параллелограмм, т. е. $AB \parallel CE$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные. ΔECD – равнобедренный, значит $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. $\angle A = \angle D$; $AD \parallel BC$, $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle D + \angle C = 180°$, $\angle B = 180° - \angle A$, $\angle C = 180° - \angle D$, т. к. $\angle A = \angle D$, то $\angle B = \angle C$. $\Delta ABD = \Delta DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD – общая, $\angle A = \angle D$) следовательно, $BD = AC$.

389. <u>**Дано:**</u> **а)** $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$;

б) $\angle AC = \angle BD$.

<u>**Доказать:**</u> $AB = CD$.



<u>**Доказательство.**</u>

а) Проведем $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$, BCC_1B_1 – прямоугольник. $\Delta ABB_1 = \Delta CDC_1$ по катету и острому углу ($BB_1 = CC_1$ – из прямоугольника BCC_1B_1), $\angle A = \angle D$, следовательно, $AB = CD$, ч.т.д.

б) $\Delta ACC_1 = \Delta DBB_1$ по катету и гипотенузе ($AC = BD$, $CC_1 = BB_1$), следовательно, $AC_1 = B_1D$; $AB_1 = AC_1 - B_1C_1$, $C_1D = B_1D - B_1C_1$, значит $AB_1 = C_1D$.

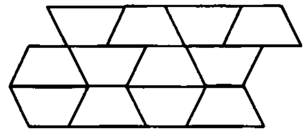
$\Delta ABB_1 = \Delta DCC_1$ по двум катетам ($BB_1 = CC_1$, $AB_1 = DC_1$), следовательно, $AB = CD$, ч.т.д.

390. <u>**Дано:**</u> $\angle A = 68°$, $AB = CD$; $\angle B$, $\angle C$, $\angle D = ?$

<u>**Решение.**</u> Трапеция $ABCD$ – равнобедренная, значит $\angle A = \angle D = 68°$, а $\angle B = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180°$; $\angle B = 180° - 68° = 112°$; $\angle C = \angle B = 112°$.

<u>**Ответ:**</u> 112°, 112°, 68°.

391. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (внутренние односторонние углы при параллельных прямых и секущей). $\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие). Значит

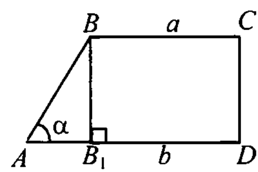


$\angle 2 + \angle 3 = 180°$, т. е. при совмещении трапеций получается развернутый угол. Таким образом, трапеции можно непрерывно уложить в ряд, как показано на рисунке.

Однако условие задачи сформулировано некорректно. Например, если S – площадь паркетной плитки в виде равнобедренной трапеции, S_1 – некая площадь, ограниченная стенами, и $S > S_1$, то в этом случае паркет уложить нельзя.

392. **<u>Дано:</u>** $\angle D = 90°$, $AD = b$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$;

а) $\angle AB$ = ? **б)** $\angle CD$ = ?



<u>Решение.</u> а) a = 4см, b = 7см, $\alpha = 60°$; проведем: $BB_1 \perp AD$;

$AB_1 = AD - \angle DB_1$; $AB_1 = 7 - 4 = 3$ см,

в ΔABB_1 $\angle A = 60°$ (по условию), тогда $\angle B = 30°$, значит,

$AB_1 = \frac{1}{2} AB$ (свойство прямоугольного треугольника), т. е.

$\angle AB = 2 \cdot 3 = 6$ см.

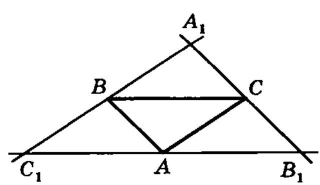
б) a = 10 см, b = 15см, $\alpha = 45°$; $AB_1 = AD - DB$:

$AB_1 = 15 \quad 10 = 5$ см, следовательно $\angle CD = 5$ см (свойство прямоугольника).

<u>Ответ:</u> а) 6 см; **б)** 5 см.

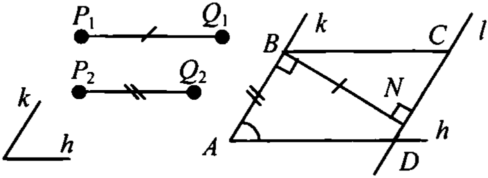
393. Решение приведено в учебнике.

394. По условию, точки A, B и C не лежат на одной прямой. Соединим их отрезками. Через каждую вершину проведем прямую, параллельную противолежащей стороне. Таким образом, $B_1C_1 \parallel BC$,



$C_1A_1 \parallel CA$, $AB \parallel A_1B_1$. Отсюда следует, что четырехугольники C_1BCA; ABA_1C; $ABCB_1$ – параллелограммы, т. к. их противоположные стороны попарно параллельны. Задача имеет 3 решения, т. е. можно построить три параллелограмма.

395.



1) Строим $\angle A = \angle hk$; $AB = P_2Q_2$;

2) строим перпендикуляр из точки B к лучу AB; $BN \perp AB$, $BN \perp P_1Q_1$;

3) через N проведем прямую $l \| AB$;

4) $l \cap h = D$, от D отложим отрезок, равный P_2Q_2, $DC = P_2Q_2$;

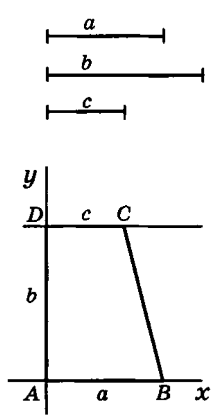
5) соединим B и C, получим $ABCD$ – параллелограмм.

396. Решение приведено в учебнике.

397. **а)** 1) отрезок AD; 2) $\angle A$; 3) AB, на стороне угла;
4) $\angle D = \angle C$; 5) $DC = AB$; 6) $ABCD$ – искомая трапеция.

б) 1) отрезок BC; 2) окружности с центрами в B и C и радиусом AB;
3) окружность с центром в B и радиусом BD.
4) Попарное пересечение этих окружностей даст точки A и O.
5) $ABCD$ – равнобедренная трапеция.
Построение возможно только тогда, когда из отрезков BC, AB и BD можно построить треугольник.

398. Даны отрезки a, b и c. Проведем две взаимно перпендикулярные прямые x и y с пересечением в точке A. От точки A на прямой x отложим отрезок AB, равный a. На прямой y от точки A отложим отрезок, равный b. Через точку D проведем прямую параллельную прямой AB и отложим на ней отрезок, равный c от точки D, чтобы точка D лежала на прямой по ту же сторону, что и точка B. Соединим точки B и C. Получаем трапецию $ABCD$. Задача имеет единственное решение.

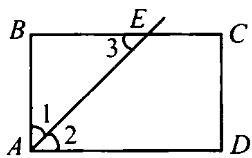


§ 3 Прямоугольник, ромб, квадрат

399. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм; $\angle A = 90°$.
<u>**Доказать:**</u> $ABCD$ – прямоугольник.
<u>**Доказательство.**</u> $ABCD$ – параллелограмм, следовательно, $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C = 90°$, $\angle B = \angle D$.
Т. к. $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle B = 180° - 90° = 90°$.
Значит $\angle D = \angle B = 90°$. Т. е. в $ABCD$ стороны попарно равны; все углы прямые, значит, $ABCD$ – прямоугольник, ч.т.д.

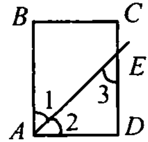
400. Предположим, что в четырехугольнике $MNPQ$ все углы прямые. Имеем $\angle M = \angle N = 90°$, значит, $MQ \parallel NP$ и $\angle P = \angle Q = 90°$, значит, $MN \parallel PQ$. Получаем, что противоположные стороны четырехугольника $MNPQ$ попарно параллельны, значит, данный четырехугольник – параллелограмм, а т. к. все его углы прямые, то $MNPQ$ – прямоугольник.

401. **а)** Пусть AE – биссектриса $\angle A$; $E \in BC$, $BE = 45{,}6$ см, $EC = 7{,}85$ см.



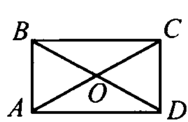
$\angle 1 = \angle 3$, т. к. $\angle 1 = \angle 2$ (по условию), $\angle 2 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AE), значит ΔABE – равнобедренный и $AB = BE = 45{,}6$ см.
$BC = BE + EC$, $BC = 45{,}6 + 7{,}85 = 53{,}45$ см, $AD = BC = 53{,}45$ см.
$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$; $P_{ABCD} = 2 \cdot (45{,}6 + 53{,}45) = 198{,}1$ см.

б) $E \in DC$, $CE = 2{,}7$ дм, $ED = 4{,}5$ дм. ΔAED – равнобедренный ($\angle 2 = \angle 3$), следовательно, $AD = ED = 4{,}5$ дм;

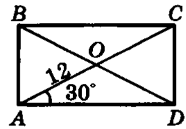


$CD = CE + ED = 2{,}7 + 4{,}5 = 7{,}2$ дм;
$P_{ABCD} = 2 \cdot (AD + CD)$;
$P_{ABCD} = 2 \cdot (4{,}5 + 7{,}2) = 23{,}4$ дм.

402. $ABCD$ – прямоугольник, следовательно, $AC = BD$, $BO = OD$, $AO = OC$ (по свойствам прямоугольника, т. е. $AO = OC = OB = OD$. Итак, $AO = OD$ и $\angle AO = \angle OB$, значит ΔAOD и ΔAOB – равнобедренные (по определению).



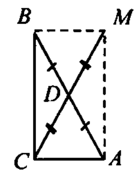
403. Рассмотрим ΔCAD. Это прямоугольный треугольник (т. к. $ABCD$ – прямоугольник) с $\angle CAD = 30°$ и гипотенузой $AC = 12$ см.



Значит, катет $CD = \dfrac{1}{2}AC = 6$ см.

Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, а значит, $AO = OC = BO = OD$. Так как $AC = 12$ см, то $AO = OC = 6$ см. Но $CD = 6$ см, а значит, ΔAOB – равносторонний. Тогда получаем: $P_{\Delta AOB} = 3 \cdot 6 = 18$ см.

404. **<u>Дано:</u>** ΔABC – прямоугольный; $\angle C = 90°$;

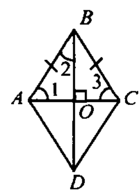


$BD = AD$; CD – медиана. **<u>Доказать:</u>** $CD = \dfrac{1}{2}AB$.

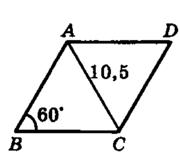
<u>Доказательство.</u>
Продлим отрезок CD и отметим на луче отрезок $DM = CD$, получим четырехугольник $AMBC$, который является прямоугольником.
$\Delta ADM = \Delta CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = AB$ и $MD = DC$ – по условию, $\angle ADM = \angle CDB$ – вертикальные), следовательно $AM = BC$.
Аналогично из $\Delta ADC = \Delta BDM$ следует $AC = MB$. Значит, $AM = BC$, $AC = MB$, $\angle C = 90°$, т. е. $AMBC$ – прямоугольник.
AB и MC – диагонали прямоугольника $AMBC$, т. е. $AB = MC$,

$AD = DB = MD = DC$, значит, $DC = \dfrac{1}{2}AB$, ч.т.д.

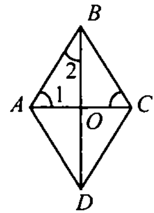
405. **<u>Дано:</u>** $ABCD$ – ромб; $AC = AB$;
а) $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$ **б)** $\angle 1, \angle 2 = ?$



<u>Решение:</u>
$AB = AC$, следовательно, ΔABC – равносторонний, т. е. $\angle 1 = \angle B = \angle 3 = 60°$;
По св-ву углов ромба $\angle A + \angle B = 180°$, т. е. $\angle A = 180° - 60° = 120°$;
ΔABO – прямоугольный, значит $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $60° + \angle 2 = 90°$, $\angle 2 = 30°$.



406. Рассмотрим ΔABC. $AB = BC$ (как стороны ромба). Значит, ΔABC – равносторонний. $\angle B = 60°$ и $AC = 10{,}5$ (по условию). Отсюда следует, что и $AB = 10{,}5$ см, а $P_{ABCD} = 10{,}5 \cdot 4 = 42$ см.



407. **<u>Дано:</u>** *ABCD* – ромб; $\angle B = 45°$; $\angle 1$, $\angle 2 = ?$

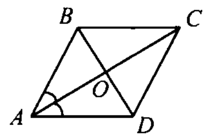
<u>Решение.</u>

BD – биссектриса $\angle ABC$, следовательно,

$$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}45° = 22°30'.$$

ΔABO – прямоугольный, значит,

$\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle 1 = 90° - 22°30' = 67°30'$.



408. **<u>Дано:</u>** *ABCD* – параллелограмм;

а) $\angle BOC = 90°$:

б) *AC* – биссектриса угла.

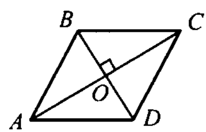
<u>Доказать:</u> *ABCD* – ромб.

<u>Доказательство.</u>

а) $AC \perp BD$. $\Delta BCO = \Delta DCO$ по 2 катетам (по свойству диагоналей $BO = OD$, *CO* – общая), значит $BC = CD$.

Т. к. $BC = AD$, $BC = CD$, то $AB = BC = CD = AD$,

значит *ABCD* – ромб, ч.т.д.



б) ΔACD – равнобедренный по признаку,

т. к. $\angle A = \angle C$, следовательно, $AD = DC$;

$AD = BC$,

$AD = DC$. Таким образом,

$AD = DC = BC = AB$, т. е. *ABCD* – ромб, ч.т.д.

409. **<u>Дано:</u>** *ABCD* – ромб, $\angle A = 90°$. **<u>Доказать:</u>** *ABCD* – квадрат.

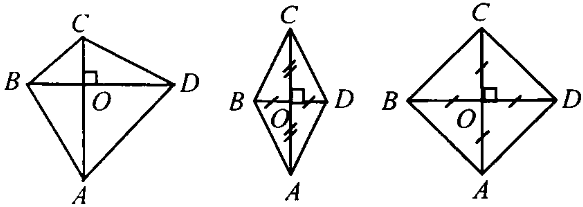
<u>Доказательство.</u>

ABCD – ромб, значит $AB = BC = CD = AD$;

$\angle A = \angle C = 90°$, $\angle A + \angle B = 180°$, т.е. $\angle B = 180° - \angle A = 90°$.

Т. к. все стороны равны и все углы равны 90°, то *ABCD* – квадрат, ч.т.д.

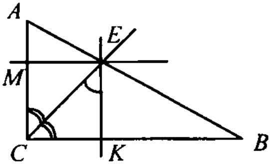
410.



а) нет; **б)** нет; **в)** да.

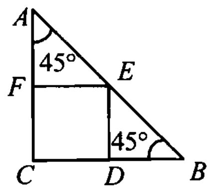
411. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $\angle C = 90°$, CE – биссектриса; $EK \| AC$, $ME \| CK$.
Доказать: $CMEK$ – квадрат.

<u>**Доказательство.**</u>



По условию $MC \| EK$, значит, по определению $CMEK$ – параллелограмм.
По свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle E$;
т. к. CE – биссектриса $\angle C$, то EC – биссектриса $\angle E$,
значит $\angle 1 = \angle 2$ и ΔCKE – равнобедренный, т.е. $CK = EK$.
$CK = ME$, т. к. $CMEK$ – параллелограмм, значит $CMEK$ – ромб.
$\angle C = 90°$, значит, $\angle E = 90°$, $\angle M = \angle K = 90°$.
Следовательно, $CMEK$ – квадрат, что и требовалось доказать.

412. ΔABC – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle B = 45°$,
т. е. ΔADE и ΔEFB – равнобедренные прямоугольные треугольники, где $AD = DE$ и $EF = BF$;
$CDEF$ – квадрат, следовательно, $DE = EF$, т. е. $AD = DE = EF = BP$.



$P_{CDEF} = CD + DE + EF + CF$, где $DE = AD$; $EF = BF$;
$P_{CDEF} = CD + AD + BF + CF$, где $CD + AD = AC$; $BF + CF = BC$;
$P_{CDEF} = AC + BC = 12 + 12 = 24$ см.

413. **а)** 1) Строим $\angle mn = 90°$;
2) откладываем на луче n отрезок, равный a;
3) откладываем на луче m отрезок, равный b;
4) через A и B проводим $l_1 \| m$ и $l_2 \| n$;
5) $l_1 \cap l_2 = C$, $OABC$ – прямоугольник.
б) 1) Строим $\angle mn = 90°$,
2) откладываем на луче n отрезок, равный a;
3) Окр. $(A; d)$, окр. $(A; d) \cap m = C$;
4) через C проводим прямую $l_1 \| m$, через A провести прямую $l_2 \| n$;
5) $OABC$ – искомый прямоугольник.
в) 1) Строим $\angle O = \alpha$;
2) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно от т. O в разные стороны отложим отрезки, равные $\frac{1}{2}d$: $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}d$;
3) $ADBC$ – искомый прямоугольник.

414. **а)** Диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, $a \perp b$, так же диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.

Значит, на прямой b от O отложим $OA = OB = OC = \frac{1}{2}d_1$,

$ABCD$ – искомый ромб.

б) Построим $\angle A = \alpha$, проведем $AB = a$, через B проведем $l_1 \| n$, $BC = a$, через C проведем $l_2 \| m$, получим $l_2 \cap n = D$, тогда $ABCD$ – искомый ромб.

415. **а)** Построим $n \perp m$, $n \cap m = A$, от A на n отложим $AB = a$ и $AD = a$ на m, через B и D проведем прямые $l_1 \| m$, $l_2 \| n$, имеем $l_1 \cap l_2 = \angle C$, тогда $ABCD$ – искомый квадрат.

б) Построим $n \perp m$, $n \cap m = O$. Диагонали взаимно перпендикулярны, равны и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, отложим на m $OA = OC = \frac{1}{2}d$.

$OB = OD = \frac{1}{2}d$ на n, имеем $ABCD$ – искомый квадрат.

416. Провести к прямой a перпендикуляр через M, провести окружность с центром O и радиусом OM. При пересечении окружности с перпендикуляром получится M' – искомая.

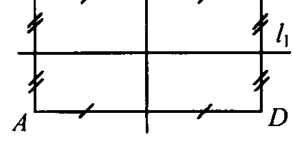
417. **а)** Две оси симметрии, это прямая на которой лежит отрезок и серединный перпендикуляр;

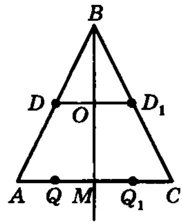
б) бесконечное множество осей симметрии, это любой перпендикуляр и сама прямая;

в) одну ось симметрии, это прямая, на которой лежит луч.

418. А, Е, О имеют ось симметрии.

419. Из определения фигуры, симметричной относительно прямой, следует, что каждая точка прямоугольника имеет симметричную точку прямоугольника относительно любой на прямой l_1 и l_2.



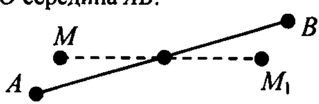


420. Возьмем равнобедренный ΔABC, где AC – основание, BM – биссектриса. Тогда BM – высота и медиана ΔABC, значит, $BM \perp AC$ и $AM = MC$. Отсюда следует, что точки A и C симметричны относительно прямой BM. Точка B лежит на прямой BM и значит, симметрична самой себе относительно прямой BM.

Возьмем произвольную точку Q на прямой AC (Q лежит между точками A и M). Отметим точку Q_1 между точками M и C так, чтобы $QM = MQ_1$. Отсюда следует, что точки Q и Q_1 симметричны относительно прямой BM. Поэтому для каждой точки на основании AC точка, симметричная ей относительно BM, также лежит на основании AC.

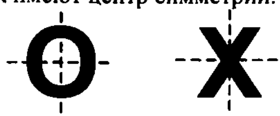
Теперь возьмем произвольную точку D на стороне AB ΔABC. Отложим на стороне BC отрезок $BD_1 = BD$. Рассмотрим ΔDBD_1. Он равнобедренный. BO – биссектриса, а также высота и медиана, т. е. $BO \perp DD_1$ и $DO = D_1O$, а значит, точки D и D_1 симметричны относительно прямой BM. Это и означает, что прямая BM, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, является осью симметрии этого треугольника.

421. Точка M_1 – симметрична точке M относительно точки O, где O середина AB.



422. а) да; б) нет; в) да; г) да.

423. О и Х имеют центр симметрии.



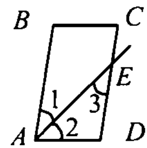
424. __Дано:__ $ABCD$ – четырехугольник, у которого не все углы равны друг другу.

Доказать: хотя бы один угол – тупой.

__Доказательство.__ Пусть в четырехугольнике все углы острые, а именно $\angle A < 90°$; $\angle B < 90°$; $\angle C < 90°$; $\angle D = 90°$, то $\angle A + \angle B +$

$+ \angle C + \angle D < 360°$, а такого не может быть, т. к. сумма углов четырехугольника равна 360°. Т. е. предположение о том, что не все углы острые – неверно. Следовательно, хотя бы один угол – тупой, что и требовалось доказать.

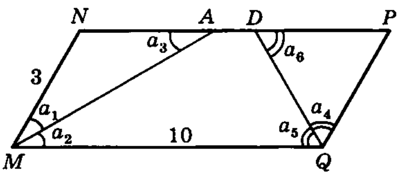
425. $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, $46 = 2 \cdot (14 + AD)$, значит, $AD = 9$ см,



$AD < AB$, значит, $E \in DC$.
$\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при $AB \| CD$ и секущей AE); по условию $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle 2 = \angle 3$, т. е. ΔAED - равнобедренный и $AD = ED = 9$ см. $CE = CD - ED = 14 - 9 = 5$ см.

<u>Ответ:</u> 5 см, 9 см.

426. Биссектриса $\angle M$ пересекает противоположную сторону NP в точке A. Биссектриса $\angle Q$ пересекает противоположную сторону в точке D. Таким образом, на стороне NP получаем три отрезка: NA, AD и DP. По условию $MQ = 10$ см, $MN = 3$ см. В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $MQ = NP = 10$ см, $MN = PQ = 3$ см.

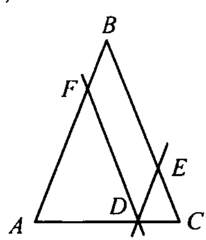


Учтем, что $\angle a_1 = \angle a_2$ (т. к. MA – биссектриса $\angle M$), $\angle a_2 = \angle a_3$ (как накрест лежащие при пересечении прямых $MQ \| NP$ секущей MA). Значит, $\angle a_1 = \angle a_3$ и ΔMNA - равнобедренный: $MN = NA = 3$ см. Аналогично рассматриваем ΔQDP: $DP = PQ = 3$ см. Так как $NP = 10$ см, то $AD = NP - (NA + DP) = 10$ см $- (3$ см $+ 3$ см$) = 4$ см.

427. **<u>Дано:</u>** ΔABC, $AB = BC$, $D \in AC$, $DE \| AB$, $FE \| AC$.

<u>Доказать:</u> $P_{AFED} = AB + BC$.

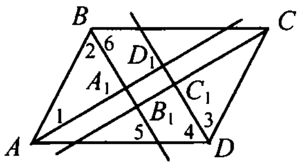
<u>Доказательство.</u>



1) ΔABC – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle C$;
$AB \| DE$, следовательно, $\angle A = \angle D$ (соответственные), т. е. $\angle D = \angle C$ и $DE = EC$.

2) $FB \parallel DE$; $FD \parallel BE$, следовательно, $BEDF$ – параллелограмм, т.е $FD = BE$ и $FB = DE$. $FD \parallel BC$, значит, $\angle C = \angle ADF$, $\angle A = \angle C$, т. е $\angle A = \angle ADF$, следовательно, $AF = FD$.
3) $P_{FBED} = FB + BE + ED + FD$, где $ED = EC$; $FD = AF$.
$P_{AFED} = FB + BE + EC + AF = AB + BC$, ч.т.д.

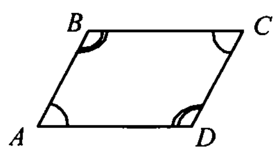
428. __Дано:__ $ABCD$ – параллелограмм; $AB \neq AD$, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – биссектрисы углов.
__Доказать:__ $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник.



__Доказательство.__
1) По свойству углов параллелограмма $\angle A = \angle B = 180°$. Значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$ (т. к. $\angle 1 = = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B$), следовательно, в ΔABA_1 $\angle A_1 = 90°$ и ΔABA_1 – прямоугольный. Аналогично: в ΔCC_1D $\angle C_1 = 90°$.
2) По свойству углов параллелограмма $\angle B = \angle D$, BB_1; DD_1 – биссектрисы, значит, $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6$; $BC \parallel AD$, следовательно, $\angle 6 = \angle 5$, т. е. $\angle 5 = \angle 4$ как соответственные углы при прямых BB_1 и DD_1 и секущей AD, отсюда $BB_1 \parallel DD_1$. Аналогично $AA_1 \parallel CC_1$.
3) $AA_1 \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel DD_1$, $\angle A_1 = \angle C_1 = 90°$, значит, $\angle A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник, что и требовалось доказать.

429. __Дано:__ $ABCD$ – четырехугольник; $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$.
__Доказать:__ $ABCD$ – параллелограмм.
__Доказательство.__
1) $\angle A$ и $\angle B$ – односторонние при прямых AD и BC и секущей AB Т. к. по условию $\angle A + \angle B = 180°$, то по признаку параллельных прямых $AD \parallel BC$.
2) $\angle B$, $\angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC. Т. к. по условию $\angle B + \angle C = 180°$, то по признаку $AB \parallel CD$.
3) Т. к. $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, то по определению $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

430. __Дано:__ $ABCD$ – четырехугольник; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
__Доказать:__ $ABCD$ параллелограмм.



__Доказательство.__
1) По свойству суммы углов четырехугольника: $\angle A + \angle B +$

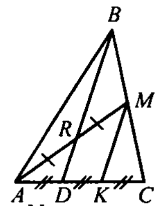
$+ \angle C + \angle D = 360°$, где $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, отсюда следует $2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle B = 360°$, $\angle A + \angle B = 180°$;

2) $\angle A$, $\angle B$ – односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB, $\angle A + \angle B = 180°$, значит, $AD \| BC$;

3) $\angle B$, $\angle C$ – односторонние углы при прямых AB и CD и секущей BC, $\angle B + \angle C = 180°$, значит, $AB \| CD$;

4) $AD | BC$, $AB \| CD$, т. е. $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.

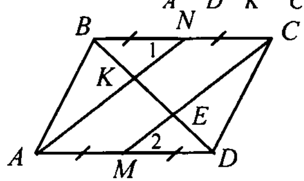
431. Проведем $MK \| BD$, тогда $DK = KC$ (по т. Фалеса).



В ΔAMK $KD \| MR$; $AK = KM$, следовательно, по т. Фалеса $AD = DK$.

$AC = AD + DK + KC$, но $AD = DK = KC$, значит,

$AC = 3AD$, т. е. $AD = \dfrac{1}{3} AC$, ч.т.д.



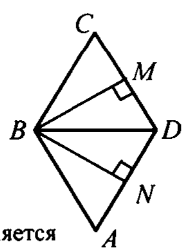
432. $\Delta ABN = \Delta CDM$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$ – по свойству параллелограмма, $BN = MD$ и $\angle B = \angle D$ – по условию), значит $\Delta ABN = \Delta CDM$, следовательно, $AN = MC$.

По условию $NC = AM$, и $AN = MC$, значит, $ANCM$ – параллелограмм, и $AN \| MC$.

В ΔBCE: $NK \| CE$; $BN = NC$, значит $BK = KE$ (т. Фалеса).

В ΔAKD: $ME \| AK$; $AM = MD$, следовательно $KE = ED$ (т. Фалеса), следовательно, $BK = KE = ED$, ч.т.д.

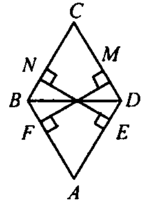
433. $\angle B = \angle D$ по св-ву углов ромба, а по св-ву диагонали BD – биссектриса.



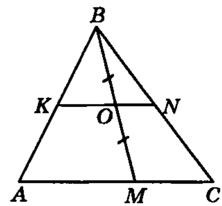
$\angle DBM = \angle DBK$.

$\Delta BCM = \Delta BAK$ по гипотенузе и острому углу ($BC = BA$, т.к. $ABCD$ – ромб, $\angle C = \angle A$,) значит $\angle CBM = \angle ABK$.

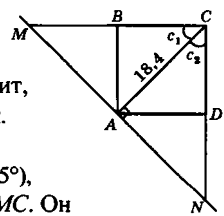
$\angle MBD = \angle DBC - \angle MBC$; $\angle DBK = \angle DBA - \angle ABK$, значит, $\angle MBD = \angle DBK$, т.е. BD является биссектрисой $\angle MBK$, ч.т.д.



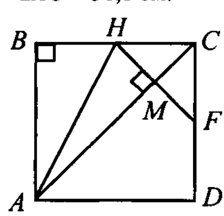
434. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$.
<u>**Доказать:**</u> $ON = OM = OE = OF$.
<u>**Доказательство.**</u>
$\Delta BON = \Delta BOM$ по гипотенузе и острому углу (BO – общая сторона, $\angle NBO = \angle MBO$ – по св-ву ромба). Значит, $OM = ON$.
Аналогично $\Delta FOD = \Delta EOD$ и $OE = OF$.
$\Delta AOF = \Delta COM$ по гипотенузе и острому углу ($AO = OC$ – по св-ву ромба, $\angle OAF = \angle OCM$), следовательно, $OF = OM$. $OM = ON$, $OE = OF$, $OF = OM$, следовательно, $ON = OM = OE = OF$. Что и требовалось доказать.



435. Возьмем произвольную точку M на стороне AC ΔABC. Точка O является серединой отрезка BM. Через точку O проведем $KN \parallel AC$. Точки K и N находятся на сторонах AB и BC соответственно. $AK = KB$ и $BN = NC$ (доказано в задаче 384 из учебника). Отсюда получаем: точка O находится на отрезке KN, концы которого являются серединами сторон, что и требовалось доказать.

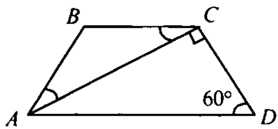


436. $MN \perp AC$ и $\angle CAN$ – прямой.
$\angle C_1 = \angle C_2 = 45°$ (т. к. диагональ AC делит $\angle C$ квадрата $ABCD$ пополам). Значит, $\angle N = 45°$. Следовательно, и $\angle M = 45°$, т. к. ΔNMC – прямоугольный.
ΔACN – равнобедренный (т. к. $\angle C_2 = \angle N = 45°$), $AC = AN = 18{,}4$ см. Это относится и к ΔAMC. Он прямоугольный и равнобедренный.
Значит, $AC = AM = 18{,}4$ см. Поэтому $MN = 2AC = 36{,}8$ см.



437. $\Delta HMC = \Delta FMC$ по катету и острому углу (CM – общая, $\angle HCM = \angle FCM = 45°$), значит $HC = CF$, $HM = MF$.
$\Delta ABH = \Delta AMH$ по катету и гипотенузе (AH – общая, $AB = AM$ – по условию), следовательно, $BH = HM$.
Итак, $CM = HM = BH$, ч.т.д.

438. В ΔACD $\angle C = 90°$,



$\angle D = 60°$, значит, $\angle A = 30°$,

следовательно, $CD = \dfrac{1}{2}AD$.

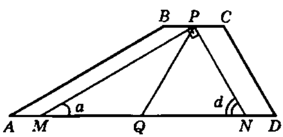
Т. к. $\angle BAC = \angle CAD = 30°$, то $\angle A = 60°$, следовательно, $ABCD$ – равнобедренная, т. е. $CD = AB$. Т. к. $\angle CAD = \angle BAC$, то $\angle BAC = \angle BCA$, значит, ΔABC – равнобедренный, т.е. $AB = BC$.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$, где $CD = \dfrac{1}{2}AD$, $AB = BC = CD$,

$20 = \dfrac{1}{2}AD + \dfrac{1}{2}AD + \dfrac{1}{2}AD + \dfrac{1}{2}AD = 2{,}5AD$; $20 = 2{,}5\,AD$,

$\angle AD = 20 : 2{,}5 = 8$.

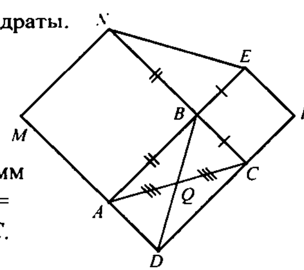
439. Сделаем дополнительное построение. Возьмем точки P и Q на основаниях BC и AD соответственно, причем $BP = PC$ и $AQ = QD$. Соединим точки P и Q. Сумма $\angle A + \angle D$ на основании AD равна 90° (по условию).



Проведем прямые $PM \parallel AB$ и $PN \parallel CD$. Таким образом, $ABPM$ и $NPCD$ – параллелограммы, а значит, $AM = BP$ и $PC = ND$, $BP = PC$ и $AQ = QD$ – по условию. Поэтому $MQ = QN$, $MN = AD - (AM + ND)$, но $AM + ND = BC$, значит, $MN = AD - BC$. Так как $AB \parallel PM$, то $\angle A = \angle a$ и т. к. $CD \parallel PN$, то $\angle D = \angle d$; $\angle a + \angle d = 90°$. Отсюда ΔMPN – прямоугольный ($\angle P$ – прямой). PQ является медианой этого треугольника и

значит, $PQ = \dfrac{1}{2}MN$ или $PQ = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$, ч.т.д.

440. <u>**Дано:**</u> ΔABC; $ABNM$, $BEFC$ – квадраты.



<u>**Доказать:**</u> $BQ = \dfrac{1}{2}NE$.

<u>**Доказательство.**</u>

Построим $QD = QB$; $ABCD$ – параллелограмм (по признаку). $AQ = \angle QC$, $\angle BQ = $ $= \angle QD$. Следовательно, $AD = BC$.

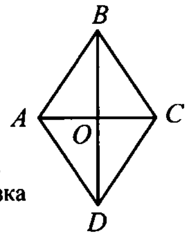
$\Delta BNE = \Delta ABD$ по двум сторонам и углу между ними ($NB = AB$, $BE = AD$,

$\angle B = \angle A$), значит $NE = BD$, т. е. $BQ = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}NE$, ч.т.д.

441. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – ромб.

<u>**Доказать:**</u> BD, AC – оси симметрии.

<u>**Доказательство.**</u>



ΔABC и ΔADC равнобедренные.
Биссектриса BD – ось симметрии равнобедренного треугольника (любая точка отрезка AB имеет симметричную точку отрезка BC относительно BD).

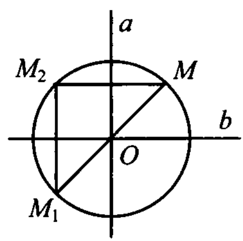
442. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – ромб. Доказать: O – ось симметрии.
Доказательство – см. **434.**

443. Бесконечное множество.

444. <u>**Дано:**</u> $a \perp b$, $a \cap h = O$; a, b – оси симметрии окр. $(O; R)$.

<u>**Доказать:**</u> O – центр симметрии.

<u>**Доказательство.**</u>



$\Delta MFO = \Delta M_1OF$ по катету и гипотенузе ($OM = \angle OM_1 = R$; OF - общая сторона),
т. е. $MF = FM$, следовательно, $\angle M$ и $\angle M_1$ – симметричные относительно прямой a.
M_1 и M_2 – симметричны относительно прямой b, т. к. $\Delta M_1OQ = M_1OQ$, откуда, $M_1Q = QM_2$.
$MF \| b$, $M_1Q \parallel a, \angle O = 90°$, значит, $MFOQ$ – прямоугольник и $\angle M_1 = 90°$.
Следовательно, ΔM_2MM_1 - прямоугольный с $\angle M_1 = 90°$.
Т. е. M_2M_1 – диаметр окружности и $M_2O = OM$, следовательно, M_2 и M – симметричны относительно O, что и требовалось доказать.

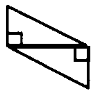
Глава VI.
Площадь

§ 1 Площадь многоугольника

445. Пусть площади треугольников равны S.
Площади фигур равны между собой и составляют $2S$.

а)

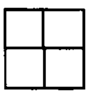
б)



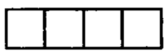
в)

446.

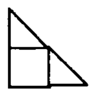
а)



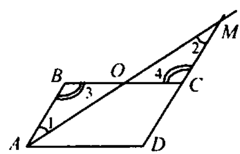
б)



в)

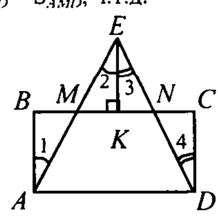


447. $\Delta ABO = \Delta MCO$ по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CM$, $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при $AB \| CD$ и секущей AM, $\angle 3 = \angle 4$ – накрест лежащие при $AB \| CD$ и секущей BC),



т.е. по свойству площадей $S_{ABO} = S_{MCO}$. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{AOCD}$, где $S_{ABC} = S_{MCO}$; $S_{AMD} = S_{MCO} + S_{AOCD}$. $S_{ABCD} = S_{AMD}$, ч.т.д.

448. $EK \perp MN$. $\Delta ABM = \Delta EKM$ по гипотенузе и острому углу ($AM = ME$, $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при $AB \| EK$ при секущей AC), значит, по свойству площадей $S_{ABM} = S_{EKM}$.



$\Delta KEN = \Delta CDN$ по катету и острому углу ($EK = CD$, $\angle 3 = \angle 4$ – накрест лежащие при $KE \| CD$ и секущей ED), т. е. по свойству площадей $S_{KEN} = S_{CDN}$.
$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{CDN}$, следовательно,
$S_{AED} = S_{MEK} + S_{AMND} + S_{KEN}$, т. е. $S_{ABCD} = S_{ADE}$, ч.т.д.

449. $S = a^2$. **а)** $a = 1{,}2$ см, $S = 1{,}44$см^2;

б) $a = \dfrac{3}{4}$ дм, $S = \dfrac{9}{16}$ дм^2; **в)** $a = 3\sqrt{2}$ м, $S = 18$ м^2.

450. $S = a^2$, или $a = \sqrt{S}$. **а)** $S = 16$ см^2, $a = 4$ см;

б) $S = 2{,}25$дм^2, $a = 1{,}5$ дм; **в)** $S = 12$ м^2, $a = 2\sqrt{3}$ м.

451. $S = 24$ см^2 = 2400 мм^2 = 0,24 дм^2.

452. $S = ab$;

а) $a = 8{,}5$ см, $b = 3{,}2$ см, $S = 27{,}3$ см^2;

б) $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см, $S = 6\sqrt{2}$ см^2;

в) $a = 32$ см, $S = 684{,}8$ см^2, т. к. $b = S : a$, $b = 21{,}4$ см;

г) $b = 4{,}5$ см, $S = 12{,}5$ см^2, $12{,}5 = a \cdot 4{,}5$; $a = 2{,}7$ см ($a = S : b$).

453. $S = a \cdot b$, следовательно, **а)** S увеличится в 2 раза, **б)** S увеличится в 4 раза, **в)** S не изменится.

454. **а)** По условию $S = 250$ см^2, a и b – смежные стороны прямоугольника, где $a = 2{,}5b$. $S = a \cdot b = 2{,}5b^2 = 250$ см^2 или $b = 10$ см; $a = 25$ см.

б) $S = 9$ м^2; $P = 12$ м (по условию).

$S = a \cdot b = 9$ м^2; $P = 2\,(a + b) = 12$ м. Отсюда $a = b = 3$ м.

455. $S_{\text{пола}} = 6$ м $\cdot$ 5,5 м = 33 м^2. $S_{\text{дощечки}} = 0{,}3$ м $\cdot$ 0,05 м = 0,015 м^2.
33 : 0,015 = 2200 дощечек.

456. 1) Найдем площадь плитки: $15 \cdot 15 = 225$ см^2.

2) Найдем площадь стены: $3 \cdot 2{,}7 = 8{,}1$ м^2 = 81 000 см^2.

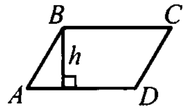
3) 81 000 : 225 = 360, т. е. 360 плиток потребуется на облицовку.

457. $S_{\text{прямоуг.}} = a \cdot b = 8 \cdot 18 = 144$ м^2.
$S_{\text{прямоуг.}} = S_{\text{кв.}}$, следовательно, сторона квадрата равна 12 м.

458. P – периметр участка; S – его площадь. S_1 – площадь квадратного участка; a – его сторона.
Сначала обсудим характеристики прямоугольного участка.
Его площадь $S = 220$ м $\cdot$ 160 м = 35200 м^2 и периметр
$P = 2 \cdot (220 + 160)$ м = 760 м.
Теперь по найденному периметру квадрата $P_{\text{квадрата}} = 4a = 760$ м (где $a = 190$ м) найдем его площадь $S_1 = a^2 = 190^{\,}$м^2 = 36 100 м^2.
Получим: $S_1 = 36\,100$ м^2 и $S = 35\,200$ м^2, отсюда
$S_1 - S = 900$ м^2, т. е. площадь квадратного участка больше.

§ 2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

459. $S = ah$;



а) $a = 15$ см, $h = 12$ см, $S = 15 \cdot 12 = 180$ см^2;

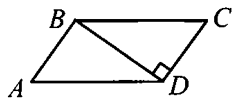
б) $S = 34$ см^2, $h = 8{,}5$ см, $a = 4$ см;

в) $S = 162$ см^2, $h = \frac{1}{2}a$, $162 = a \cdot \frac{1}{2}a$;

$324 = a^2$; $a = 18$ см;

г) $h = 3a$, $S = 27$, $27 = a \cdot 3a$; $9 = a^2$; $a = 3$, $h = 9$.

460. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм



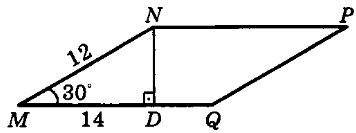
$BD \perp CD$,

$BD = 13$см, $CD = 12$см, $S = ?$

<u>**Решение.**</u>

$S = BD \cdot CD = 13 \cdot 12 = 156$ см^2.

461. $MN = 12$ см; $MQ = 14$ см;

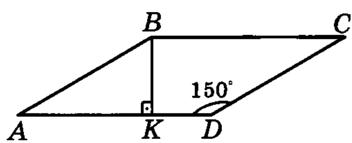


$\angle NMQ = 30°$. ND – высота, т. е. $ND \perp MQ$. ΔMDN – прямоугольный, поэтому

$ND = \frac{1}{2} MN = 6$ см.

$S_{MNPQ} = MQ \cdot ND = 14$ см $\cdot$ 6 см $= 84$ см^2.

462. По условию: $AB = 6$ см,



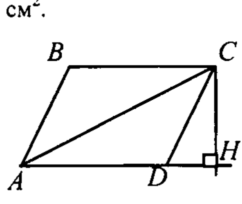
BK – высота ромба,

$\angle D = 150°$, $\angle A = 180° - \angle D = 30°$. ΔAKB – прямоугольный.

$BK = \frac{1}{2} AB = 3$ см (т. к. $\angle A = 180° - \angle D = 30°$).

Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot BK = 6$ см $\cdot$ 3 см $= 18$ см^2.

463. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм;



$AD = 8{,}1$ см, $AC = 14$ см,

$\angle CAD = 30°$; $S = ?$

<u>**Решение.**</u>

$CH \perp AD$, $S_{ABCD} = AD \cdot CH$.

В ΔACH $\angle H = 90°$, $\angle A = 30°$, значит $CH = \frac{1}{2}AC$. $CH = 7$см,

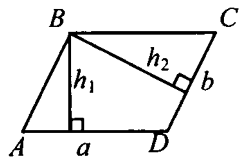
т.е. $S_{ABCD} = 8{,}1 \cdot 7 = 56{,}7$ см^2.

464. $S = ah_1$ или $S = bh_2$.

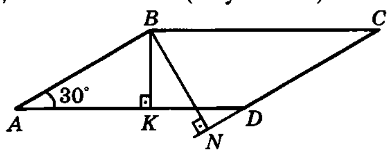
а) $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см,
$h_2 > h_1$, $h_2 = ?$, $18 \cdot h_2 = 30 \cdot 6$, $h_2 = 10$.

б) $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см;
$h_2 > h_1$, $h_1 = ?$, $10 \cdot 6 = 15 \cdot h_1$, $h_1 = 4$.

в) $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$ см, $b = 30$ см,
h_2 – ?, $h_1 = ?$, $54 = 4{,}5 \cdot h_1$, $h_1 = 12$,
$54 = 6 \cdot h_2$, $h_2 = 9$.



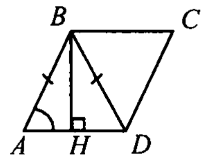
465. $\angle A = 30°$, $BK \perp AD = 2$ см; $BN \perp DC = 3$ см (по условию).
ΔAKB – прямоугольный и $AB = 2BK = 4$ см.
$S_{ABCD} = CD \cdot BN =$
$= 4$ см $\cdot$ 3 см $= 12$ см^2.



466. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм;
$\angle A = 45°$, $AD = 15{,}2$ см, $BD = AB$; $S = ?$

<u>**Решение.**</u>

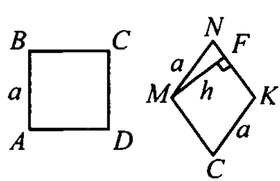
По условию $AB = BD$, значит ΔABD – равнобедренный; $\angle A = 45°$, значит и $\angle D = 45°$, а $\angle B = 90°$.



По свойству медианы прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, имеем: $BH = \frac{1}{2}AD = 7{,}6$ см.

$S_{ABCD} = BH \cdot AD = 7{,}6 \cdot 15{,}2 = 115{,}52$ см^2.

467. Пусть $ABCD$ – квадрат; $MNKE$ – ромб; $P_{ABCD} = P_{MNKE}$. Сравним S_{ABCD} и S_{MNKE}. $S_{ABCD} = a^2$.
$S_{MNKE} = a \cdot h$; ΔMNF – прямоугольный; $MF < MN$, следовательно, $h < a$, и соответственно $a^2 > ah$, значит, $S_{ABCD} > S_{MNKE}$, ч.т.д.



468. $S = \frac{1}{2}ah$;

а) $a = 7$ см, $h = 11$ см, следовательно $S = 38{,}5$ см^2;

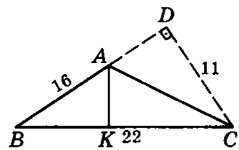
б) $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см, следовательно $S = 5\sqrt{3}$ см^2;

в) $S = 37{,}8$см^2, $a = 14$ см, следовательно, $37{,}8 = \frac{1}{2}\ 14 \cdot h$; $h = 5{,}4$ см;

г) $S = 12$ см^2, $h = 3\sqrt{2}$ см, следовательно, $12 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot a$;

$a = 4\sqrt{2}$ см.

469. CD и AK – высоты, проведенные к сторонам AB и BC соответственно.

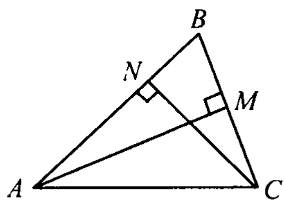


Запишем $S_{\Delta ABC}$: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AK$, отсюда $AB \cdot CD = BC \cdot AK$, т. е.

16 см · 11 см = 22 см · AK и $AK = 8$ см.

470. <u>**Дано:**</u> ΔABC; $AB = 7{,}5$ см,
$BC = 3{,}2$ см; $CN \perp AB$, $CN = 2{,}4$см;
$AM \perp BC$; $AM = ?$



<u>**Решение.**</u>

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ABCN = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 2{,}4 =$
$= 9$ см^2, с другой стороны

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot BC$; $9 = \frac{1}{2}AM \cdot 3{,}2$; откуда $AM = 5{,}625$ см.

471. $S = \frac{1}{2}ab$;

а) $a = 4$ см, $b = 11$ см, следовательно $S_\Delta = 22$ см^2;

б) $a = 1{,}2$ дм, $b = 3$ дм, $S_\Delta = 1{,}8$ дм^2.

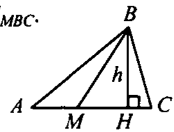
472. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $\angle C = 90°$; $AC : BC = 7 : 12$; $S_{ABC} = 168$ см^2; AB, $BC = ?$
<u>**Решение.**</u>
Пусть x см – 1 часть, следовательно, $AC = 7x$ см, $BC = 12x$ см;

$S_\Delta = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$, следовательно, $168 = \dfrac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x$;
$x^2 = 4$, $x = 2$; $AC = 7 \cdot x = 14$ см; $BC = 12 \cdot x = 24$ см.

473. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CC_1 \perp AB$, или $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot DD_1$, ($DD_1 \perp AB$);

В четырехугольнике CDD_1C_1: $CD \| C_1D_1$, ($CD \in m$, $C_1D_1 \in AB$); $CC_1 \| DD_1$ ($CD_1 \perp AB$, $\angle DD_1 \perp AB$), значит, CDD_1C_1 – параллелограмм, где $CC_1 = DD_1$ (по св-ву). Следовательно, $S_{ABC} = S_{ABD}$.

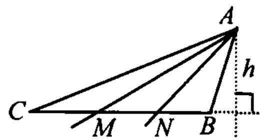
474. Пусть BM – медиана ΔABC. Сравним S_{ABM} и S_{MBC}.



$S_{ABM} = \dfrac{1}{2} AM \cdot BH = \dfrac{1}{2} MC \cdot BH$, т. к.

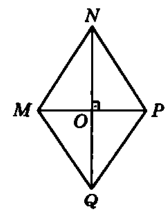
BM – медиана, $AM = MC$, $S_{ABC} = S_{MBC}$.

475. Разделим BC на три равные части, получим ΔCAM, ΔMAN, ΔNAB.



$S_\Delta = a \cdot h$, следовательно,
$S_{AMC} = CM \cdot h$,
$S_{MAN} = MN \cdot h$, $S_{NAB} = NB \cdot h$,
где $BM = MN = NB = a$.

476. Ромб $MNPQ$. Диагонали NQ и MP взаимно перпендикулярны, пересекаются в точке O.



Тогда: $S_{\Delta MNP} = \dfrac{1}{2} MP \cdot NO$; $S_{\Delta MQP} = \dfrac{1}{2} MP \cdot OQ$. Отсюда $S_{MNPQ} = S_{\Delta MNP} + S_{\Delta MQP} =$

$= \dfrac{1}{2} MP \cdot NO + \dfrac{1}{2} MP \cdot OQ =$

$= \dfrac{1}{2} MP\,(NO + OQ) = \dfrac{1}{2} MP \cdot NQ$, ч.т.д.

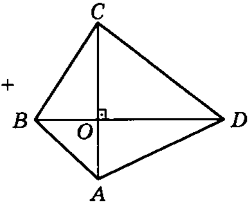
а) $S = \dfrac{1}{2} \cdot 3{,}2$ дм $\cdot\ 1{,}4$ дм $= 2{,}24$ дм^2;

б) $S = \dfrac{1}{2} \cdot 4{,}6$ дм $\cdot\ 2$ дм $= 4{,}6$ дм^2.

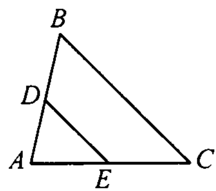
477. **<u>Дано:</u>** $ABCD$ – ромб; $S_{ABCD} = 27$ см; $AC < BD$ в 1,5 раза; $AC, BD = ?$
<u>Решение.</u>
Пусть $AC = x$ см, тогда $BD = 1{,}5x$ см;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $27 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1{,}5x$, тогда $x^2 = 36$; $x = 6$;

$AC = 6$ см, $BD = 9$ см.



478. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
$AC \perp BD$. Тогда: $S_{\Delta BCD} = BD \cdot CO$ и
$S_{\Delta ABD} = BD \cdot AO$ Отсюда: $S_{ABCD} = S_{\Delta BCD} +$
$+ S_{\Delta ABD} = BD \cdot CO + BD \cdot AO =$
$= BD\,(CO + AO) = BD \cdot AC$, ч.т.д.



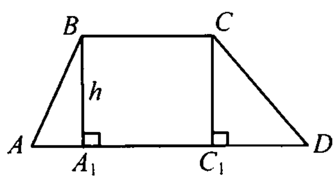
479. а) $\angle A$ – общий, значит:

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$, т. е.

$\frac{10}{S_{\Delta ADE}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 2}$; $S_{\Delta ADE} = 2$ см^2.

б) $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$, т. е. $\frac{2}{10} = \frac{AD \cdot 2}{8 \cdot 3}$

откуда $AD = 2{,}4$ см.



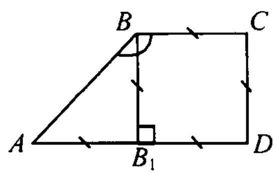
480. $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AD + CB) \cdot h$;

а) $S = \frac{1}{2}\ (21 + 17) \cdot 7 = 133$ см;

б) Рассмотрим ΔOCC_1:
$\angle C_1 = 90°$, $\angle D = 30°$, значит $CC_1 = \frac{1}{2} CD$, $CC_1 = 4$ см; т.к. $CC_1 = h$, то $h = 4$ см.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2 + 10) \cdot 4 = 24$ см^2.

в) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5 + 13) \cdot 8 = 72$ см^2.



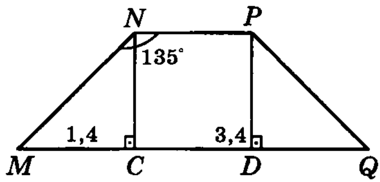
481. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – трапеция;
$\angle B = 90°$, $BC = CD = 6$;
$\angle B = 135°$; $S_{ABCD} = ?$
$BB_1 \perp AD$, в ΔABB_1: $\angle B_1 = 90°$,

$\angle A = \angle B = 45°$, тогда $AB_1 = CD =$
$= BB_1 = 6$ см, отсюда
$AD = B_1D + AB_1 = 6 + 6 = 12$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2}(12 + 6) \cdot 6 = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ: 54 см^2.

482. По условию $MNPQ$ – равнобедренная трапеция, $\angle N = 135°$; $NC \perp MQ$; $MC = 1,4$ см; $CQ = 3,4$ см. Рассмотрим ΔMNC. Это прямоугольный треугольник:

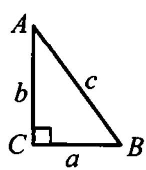


$\angle MNC = 45°$; $\angle M = 90° - \angle MNC = 45°$. Таким образом, $MC = NC$ (равнобедренный). Проведем высоту PD. Тогда, рассмотрев ΔDPQ, получим $DQ = PD = 1,4$ см (аналогично ΔMNC). Тогда: $CD = NP = CQ - DQ = 3,4$ см $- 1,4$ см $= 2$ см. $MQ = MC + CQ = 1,4$ см $+ 3,4$ см $= 4,8$ см.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot (MQ + NP) \cdot NC = \frac{1}{2} \cdot (4,8 + 2) \text{ см} \cdot 1,4 \text{ см} = 4,76 \text{ см}^2.$$

Ответ: 4,76 см^2.

§ 3 Теорема Пифагора



483. $c^2 = a^2 + b^2$;
а) $a = 6$, $b = 8$, $c^2 = 36 + 64 = 100$,
$c = \sqrt{100} = 10$;
б) $a = 5$, $b = 6$, $c^2 = 25 + 36 = 61$, $c = \sqrt{61}$;
в)

$$a = 37, b = \frac{4}{7}, c^2 = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}, c = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7};$$

г) $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$, $c^2 = 64 + 192 = 256$, $c = \sqrt{256} = 16$.

484. $c^2 = a^2 + b^2$;

а) $a = 12$, $c = 13$, $13^2 = 12^2 + b^2$, $b^2 = 25$, $b = \sqrt{25} = 5$;

б) $a = 7$, $c = 9$, $81 = 49 + b^2$, $b^2 = 34$, $b = \sqrt{34}$;

в) $a = 12$, $c = 2b$, $4b^2 = 144 + b^2$, $3b^2 = 144 + b^2 = 48$,
$b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

г) $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2b$, $4b^2 = 12 + b^2$, $3b^2 = 12$; $b^2 = 4$, $b = \sqrt{4} = 2$;

д) $a = 3b$, $c = 2\sqrt{10}$, $40 = 9b^2 + b^2$, $10b^2 = 40$; $b^2 = 4$, $b = \sqrt{4} = 2$.

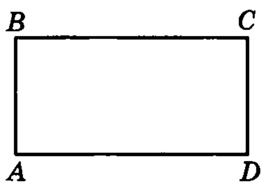
485. **<u>Дано:</u>** ΔABC, $\angle C = 90°$; $\angle A = 60°$, $AB = c$; $BC = ?$

<u>Решение.</u>

$\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$, значит $\angle B = 30°$, значит, $AC = \frac{1}{2}c$;

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$, т. е. $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

486. а) По теореме Пифагора в прямоугольном ΔACD: $AC_2 = AD_2 + CD_2$ и $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$. Но в прямоугольнике $CD = AB = 5$, поэтому $AD = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$.



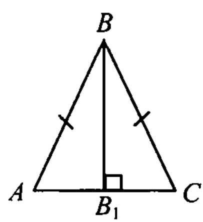
б) $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$. Аналогично, $AB = CB = 1{,}5$. Отсюда $BC = \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = \sqrt{4} = 2$.

в) $CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = 8$.

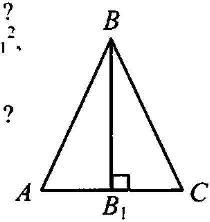
487. **<u>Дано:</u>** ΔABC; $AB = BC = 17$ см;
$AC = 16$ см, $BB_1 \perp AC$; $BB_1 = ?$

<u>Решение.</u>

Так как высота равнобедренного треугольника является медианой,
$AB = BC = 8$ см.
В ΔABB_1: $AB^2 = BB_1{}^2 + AB_1{}^2$, отсюда
$BB_1{}^2 = AB^2 - AB_1{}^2$, $BB_1{}^2 = 289 - 64 = 225$;
$BB_1 = \sqrt{225} = 15$ см.



488. а) ΔABC – равносторонний, $AB = 6$ см; $h = ?$
$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда $BB_1^2 = AB_1^2 - AB_1^2$,
$BB_1^2 = 36 - 9 = 27$, $BB_1 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$;

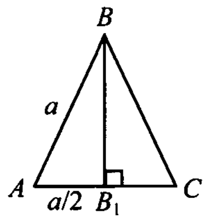


б) ΔABC – равносторонний, $h = 4$ см; $AB = ?$
Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 2x$ и
$AB_1 = BB_1^2 + AB_1^2$, $4x^2 = 16 + x^2$; $3x^2 = 16$;

$$x^2 = \frac{16}{3}, \text{ т. е. } x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

489. <u>**Дано:**</u> ΔABC – равносторонний; $AB = a$.

Доказать: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



<u>**Доказательство.**</u>
В ΔABB_1: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4};$$

$$BB_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

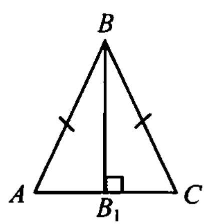
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ ч.т.д.}$$

а) $a = 5$, $S_{ABC} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

б) $a = 1{,}2$, $S_{ABC} = 0{,}36\sqrt{3}$. **в)** $a = 2\sqrt{2}$; $S_{ABC} = 2\sqrt{3}$.

490. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $AB = BC$; $AB = ?$ $S_{ABC} = ?$

<u>**Решение.**</u>



а) $AC = 12$ см, $BB = 8$ см, $BB_1 \perp AC$;
$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$ (из прямоугольного ΔABB_1);
$AB^2 = 64 + 36 = 100$; $AB = \sqrt{100} = 10$;

$$S_\Delta = \frac{1}{2}AC \cdot BB_1; \ S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ см}^2;$$

б) $AC = 8$ см, $\angle B = 120°$;

1) В ΔABB_1, $\angle B_1 = 90°$, $\angle B = 60°$, значит, $\angle A = 30°$; пусть $BB_1 = x$, тогда $AB = 2x$,

$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2$; $4x^2 = 16 + x^2$; $3x^2 = 16$; $x^2 = \dfrac{16}{3}$,

$x = \sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; т.к. $AB = 2x$, то $AB = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ см, а $BB_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

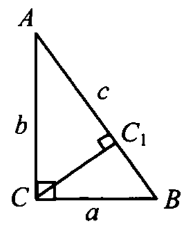
2) $S_\Delta = \dfrac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2;

в) $\angle B = 90°$, $BB_1 = 7$ см.
В ΔABB_1: $\angle B_1 = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, следовательно,
$AB_1 = BB_1 = 7$ см; $AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2$; $AB^2 = 49 + 49 = 98$;

$AB = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ см; $S_\Delta = \dfrac{1}{2} AC \cdot BB_1$; $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49$ см^2.

491. $c^2 = a^2 + b^2$;

а) $a = 5$, $b = 12$, $c^2 = 144 + 25 = 169$,
$c = \sqrt{169} = 13$.



В ΔACC_1: $CC_1^2 = AC^2 - \angle AC_1^2$; в ΔBCC_1:
$CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2$, отсюда
$AC^2 - AC_1^2 = BC^2 - BC_1^2$;
$144 - x^2 = 25 - (13 - x)^2$, где $AC_1 = x$;
$144 - x^2 = 25 - 169 + 26x - x^2$;

$26x = 288$; $x = 11\dfrac{1}{13}$; т. е. $AC_1 = 11\dfrac{1}{13}$.

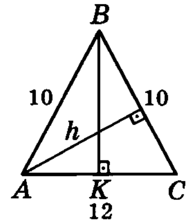
Из ΔACC_1: $AC^2 = CC_1^2 + AC_1^2$, т. е. $CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2$;

$$CC_1^2 = 144 - \left(11\frac{1}{13}\right)^2 = 144 - \left(\frac{144}{13}\right)^2 = \frac{144 \cdot 169 - 144 \cdot 144}{169} = \frac{144 \cdot 25}{169};$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{144 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = 4\frac{8}{13}.$$

б) $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$; $256 - x^2 = 144 - (20 - x)^2$ (см. **а)**);
$256 - x^2 = 144 - 400 + 40x - x^2$. $40x = 512$; $x = 12{,}8$, где $x = AC_1$;
$AC_1 = 12{,}8$ см, следовательно, $CC_1^2 = 16^2 - 12{,}8^2$;
$CC_1^2 = 3{,}2 \cdot 28{,}8 = 92{,}16$, $CC_1 = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6$ см.

492. По условию треугольник ABC является равнобедренным ($AB = BC = 10$ см), BK – высота, проведенная к основанию AC. В данном ΔABC она является и медианой.



Отсюда $AK = \frac{1}{2}AC = 6$ см. По теореме Пифагора

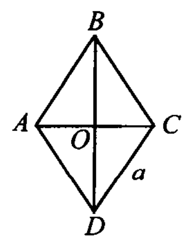
$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ см.

Проведем высоту h к любой из сторон ΔABC ($AB = BC$). Отсюда их высоты равны. Исходя из формулы $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h$, находим h:

$h = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{\frac{1}{2}AB}$ Но $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 12$ см $\cdot$ 8 см $= 48$ см^2 и

$h = \dfrac{48\text{ см}^2}{\frac{1}{2} \cdot 10\text{ см}} = 9{,}6$ см.

493. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – ромб; $AC = 10$см, $BD = 24$ см; $S = ?$, $AB = ?$



<u>**Решение.**</u>

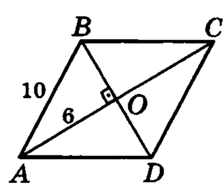
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$ см^2.

Рассмотрим ΔABO: $AB^2 = AO^2 + BO^2$,

$AB^2 = 5^2 + 12^2$; $AB = \sqrt{169} = 13$см.

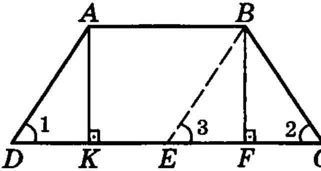
<u>**Ответ:**</u> 13 см; 120 см^2.

494. Диагонали ромба пересекаются в точке O. Рассмотрим прямоугольный ΔAOB. Гипотенуза $AB = 10$ см, катет $AO = 6$ см; отсюда $OB = \sqrt{10^2 - 6^2} =$ $= 8$ см; $BD = 2 \cdot OB = 16$ см.



$S_{ABCD} = AC \cdot BD = 96$ см^2.

495. Проведем высоты AK и BF к основанию CD.



а) Трапеция $ABCD$ – равнобедренная (по условию): $BC = DA$. Отсюда $DK = FC =$

$= \frac{1}{2}(DC - AB) = 5$ см.

ΔAKD – прямоугольный: $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{169 - 25} =$
$= 12$ (см) – по теореме Пифагора.

б) Проведем $BE \parallel AD$. Получаем $\angle 1 = \angle 3$ – соответственные углы при пересечении параллельных прямых AD и BE секущей CD. По условию $\angle C = \angle D = 60°$, отсюда $\angle 3 = \angle 2 = 60°$. Получаем $DK = FC$. ΔADK – прямоугольный; $\angle D = 60°$;

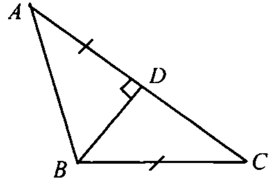
$\angle DAK = 30°$, $DK = \frac{1}{2}DA = 4$ см ($BC = AD$). По теореме Пифагора $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{64 - 16} = 4$ см. Получаем:
$DC = DK + FC + AB = 4 + 4 + 8 = 16$ см и

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot (8 + 16) \cdot 4 = 48$ см^2.

в) Рассмотрим ΔADK: $AK \perp DC$ (по построению). $\angle D = 45°$, значит, $\angle DAK = 45°$ и ΔADK – равнобедренный, где $AK = DK$. Имеем: $AD^2 = AK^2 + DK^2$ (по теореме Пифагора), $AD = BC$ (т. к. трапеция
$ABCD$ – равнобедренная – $\angle D = \angle C = 45°$ по условию). Получаем: $AD = BC = 9\sqrt{2}$; $(9\sqrt{2})^2 = 2AK^2$; $AK^2 = 81$ см^2; $AK = 9$ см. Но $AK = DK$, отсюда $DK = 9$ (см); $KF = AB = 6$ см (по условию). Тогда $DC = DK + KF + FC = 9 + 6 + 9 = 24$ (см) и

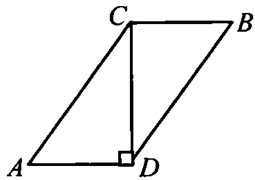
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC) \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot (6 + 24) \cdot 9 = 135$ (см^2).

496. Пусть $BC = AD = x$, тогда в ΔDBC:
$BC^2 = DC^2 + DE^2$;



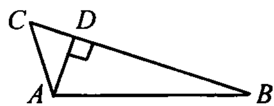
$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (3 - x)^2 =$
$= 3 + 9 - 6x + x^2$; $6x = 12$;
$x = 2$; т. е. $BC = AD = 2$ см.

Из ΔADC: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 3 = 7$; $AC = \sqrt{7}$.

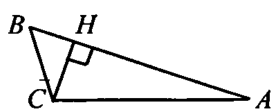


497. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм;
$BD \perp AD$;
$P_{ABCD} = 50$ см; $AC - AD = 1$ см, $CD = ?$
Решение.
Пусть $AD = x$ см, тогда $AC = (x + 1)$ см.
Т. к. $P_{ABCD} = 2(AC + AD)$, то
$50 = 2(x + x + 1)$;
$25 = 2x + 1$; $2x = 24$; $x = 12$, т. е. $AD = 12$ см, $AC = 13$ см.
Из ΔACD: $CD^2 = AC^2 - AD^2$; $CD^2 = 13^2 - 12^2$; $CD^2 = 25$,
$CD = \sqrt{25} = 5$ см.

498. **а)** 6, 8, 10 : $6^2 + 8^2 = 10^2$ ($100 = 100$) – да;
б) 5, 6, 7: $5^2 + 6^2 \neq 7^2$ ($61 \neq 49$) – нет;
в) 9, 12, 15: $9^2 + 12^2 = 15^2$ ($225 = 225$) – да;
г) 10, 24, 26: $10^2 + 24^2 = 26^2$ ($676 = 676$) – да;
д) 3, 4, 6: $3^2 + 4^2 \neq 6^2$ ($25 \neq 36$) – нет;
е) 11, 9, 13: $11^2 + 9^2 \neq 13^2$ ($202 \neq 169$) – нет;
ж) 15, 20, 25: $15^2 + 20^2 = 25^2$ ($625 = 625$) – да.



499. Высота, которая опущена на большую сторону, является меньшей.
а) Из ΔABD: $AD^2 = AB^2 - BD^2$; из ΔACD: $AD^2 = AC^2 - CD^2$.
Отсюда $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$; $24^2 - x^2 = 7^2 - (25 - x)^2$, где $BD = x$;
$50x = 1152$; $x = 23{,}04$, $x = BD = 23{,}04$ см;
$AD^2 = AB^2 - BD^2$, т.е. $AD^2 = 24^2 - (23{,}04)^2 = 45{,}1584$;
$AD = \sqrt{45{,}1584} = 6{,}72$ см.



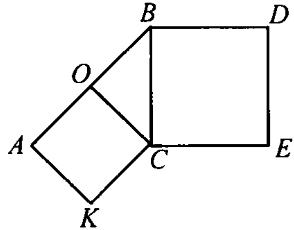
б) Из ΔACH: $HC^2 = AC^2 - AH^2$; из ΔBCH:
$HC^2 = BC^2 - BH^2$, т.е. $AC^2 - AH^2 =$
$= BC - BH^2$; $225 - x^2 = 64 -$

$-(17-x)^2$; $225-x^2=64-289+34-x^2$, где $AH=x$; $34x=540$;

$x=13\dfrac{4}{17}$, т. к. $AH=x$, то $AH=13\dfrac{4}{17}$; $HC^2=AC-AH^2$;

$$HC^2=15^2-\left(13\frac{4}{17}\right)^2=\frac{225\cdot 64}{289};\ HC=\sqrt{\frac{225\cdot 64}{28}}=17\frac{1}{17}\text{ см.}$$

500. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $\angle C=90°$, $AC=BC$;
$BDEK$, $AOCK$ – квадраты.
Доказать: $S_{BDEK}=2S_{AOCK}$.
<u>**Доказательство.**</u>
Пусть $AC=BC=a$, тогда
$S_{BDEC}=a^2$;



в ΔAOC: $OC=\dfrac{1}{2}AB$, т. к.

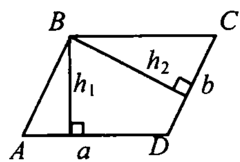
$AB^2=AC^2+BC^2$, то $AB^2=2a^2$, т. е.

$AB=a\sqrt{2}$, значит, $OC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, и $S_{AOCK}=\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$.

Сравнивая $S_{BDEC}=a^2$ и $S_{AOCK}=\dfrac{a^2}{2}$, получаем $S_{BDEC}=2S_{AOCK}$, ч.т.д.

501. 27 га = 0,27 км^2 = 270 000 м^2.

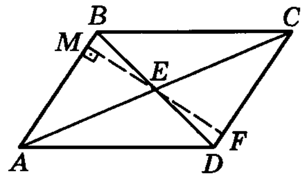
502. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм;
$P_{ABCD}=42$ см;
$h_1=5$ см, $h_2=4$ см; $S_{ABCD}=?$
<u>**Решение.**</u>
$P_{ABCD}=2\cdot(AB+AD)$; т.е.
$42=2(AB+AD)$, следовательно
$AB=21\cdot AD$;



$AD\cdot h_2=AB\cdot h_1$; $AD\cdot 4=(21-AD)\cdot 5$; $AD=11\dfrac{2}{3}$, значит,

$AB=21-\ 21-11\dfrac{2}{3}=9\dfrac{1}{3}$ см; $S_{ABCD}=AD\cdot h_2=11\dfrac{2}{3}\cdot 4=46\dfrac{2}{3}$ см^2.

503. В параллелограмме $ABCD$ проведем диагонали AC и BD. Они пересекутся в точке E.

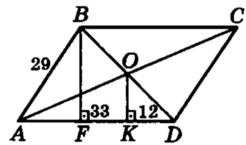


$EM \perp AB$; $EM = 2$ см (по условию). Продолжим EM до пересечения с противоположной стороной параллелограмма CD в точке F. Получаем MF – высота параллелограмма. E – центр симметрии, поэтому $ME = EF$; $MF = 2 \cdot ME = 4$ см.

$S_{ABCD} = AB \cdot MF$, тогда $AB = 6$ см.

Аналогично находим AD. Точка E удалена от сторон параллелограмма на 3 см (по условию). Поэтому высота параллелограмма, проведенная к противоположным сторонам AD и BC равна 6 см. Отсюда $AD = 4$ см. Находим периметр параллелограмма: $P_{ABCD} = 2\,(AB + AD) = 2 \cdot (6 + 4) = 20$ см.

504. По условию $AB = 29$ см, $AK = 33$ см; $KD = 12$ см (по построению). BF – высота параллелограмма. Так как $BO = OD$; $BF \parallel OK$, то $FK = KD = 12$ см (согласно задаче № 384). Отсюда $AF = AK - FK = 33 - 12 = 21$ (см).



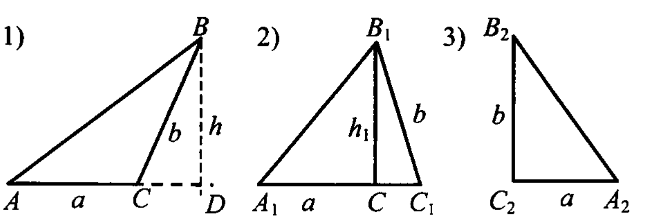
Рассмотрим прямоугольный ΔABF. По теореме Пифагора

$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot BF$; $S_{ABCD} = (33 + 12) \cdot 20 = 900$ (см^2).

Ответ: 900 см^2.

505.



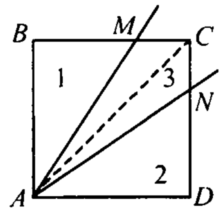
$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$; $\quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} a \cdot h_1$; $\quad S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} a \cdot b$

В случаях 1) и 2) h и $h_1 < b$, (в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета).

Сравнивая правые части формул, имеем: $\frac{1}{2}a \cdot h < \frac{1}{2}a \cdot b$:

$\frac{1}{2}a \cdot h_1 < \frac{1}{2}a \cdot b$, следовательно, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2}a \cdot b$ – наибольшая.

506. Пусть $AB = a$, тогда $S_1 = \frac{1}{2}BM \cdot AB$,



$S_2 = \frac{1}{2}DN \cdot AD$, $S_3 = S_{ABCD} - 2 \cdot S_1$.

Пусть $M \in BC$, тогда $BM = \frac{2}{3}BC$, а

$N \in CD$, тогда $DN = \frac{2}{3}CD$, значит,

AM, AN – искомые прямые.

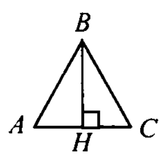
Имеем: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}a \cdot BM$, $S_{\Delta ADN} = \frac{1}{2}a \cdot DN$, $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}a \cdot MC$,

$S_{\Delta ANC} = \frac{1}{2}a \cdot CN$, т. е. $DN = BM = MC + CN$, следовательно,

$(BC + CD)$ делим на 6 равных частей, именно:

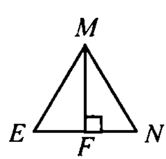
BC и CD на 3 равные части, т. е. $BM = \frac{2}{3}BC$ и $DN = \frac{2}{3}CD$.

507. 1) В ΔABC: $= AB = BC = 13$ см, $AC = 14$ см;
в ΔEMN: $EM = MN = EN = 12$ см.
Из прямоугольного ΔABH: $BH^2 = AB^2 - AH^2$;
$BH^2 = 169 - 49 = 120$; $BH = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$;



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 2\sqrt{30} = 14\sqrt{30} \text{ см}^2.$$

2) Из прямоугольного ΔEMF: $MF^2 = EM^2 - EF^2$;
$MF^2 = 144 - 36 = 108$; $MF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$;



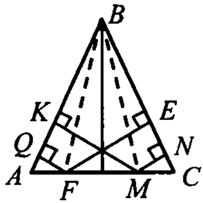
$$S_{EMN} = \frac{1}{2} \cdot EN \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Т. к. $14\sqrt{30} > 36\sqrt{3}$, то $S_{ABC} > S_{EMN}$.

508. **Дано:** ΔABC, $AB = BC$; $MN \perp BC$, $MK \perp AB$; $FE \perp BC$, $FQ \perp AB$.

Доказать: $NM + MK = EF + FQ$.

Доказательство.



$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MBC}$, иначе

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta FBC}$.

Значит $S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MBC} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta FBC}$, т.е.

$$\frac{1}{2}BC \cdot MN + \frac{1}{2}AB \cdot MK = \frac{1}{2}AB \cdot FQ +$$

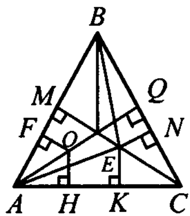
$$+ \frac{1}{2}BC \cdot HF,$$

$AB(MN + MK) = AB(FQ + FE)$, т. е. $MN + MK = FQ + FE$, ч.т.д.

509. **Дано:** ΔABC; $AB = BC = AC$; $EN \perp BC$, $EK \perp AC$, $EM \perp AB$; $OQ \perp BC$, $OH \perp AC$, $OF \perp AB$.

Доказать: $EN + EK + EM = OQ + OH + OF$.

Доказательство.



1) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AEC} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta ABE}$, также

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta COB} + S_{\Delta AOB}$ т.е.

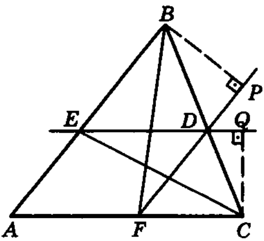
$S_{\Delta AEC} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta ABE} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta COB} + S_{\Delta AOB}$

или $\frac{1}{2}AC \cdot EK + \frac{1}{2}BC \cdot EN + \frac{1}{2}AB \cdot EM =$

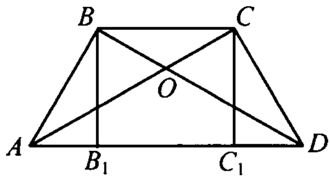
$= \frac{1}{2}AC \cdot OH + \frac{1}{2}BC \cdot OQ + \frac{1}{2}AB \cdot OF$, имеем: $AC \cdot EK +$

$+ EN \cdot BC + AB \cdot EM = AC \cdot OH + BC \cdot OQ + OF \cdot AB$, ч.т.д.

510. Рассмотрим ΔCDE. CQ – его высота; BP – высота ΔBDF. $AEDF$ – параллелограмм (по построению). BP и CQ равны высотам параллелограмма $AEDF$. Отсюда $S_{\Delta BDF} = S_{AEDF}$, $S_{\Delta CDE} = S_{AEDF}$, а значит, $S_{\Delta CDE} = S_{\Delta BDF}$, что и требовалось доказать.



511. **а)** Сравнивая ΔABD и ΔACD, имеем:



$S_{ABD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot BB_1$; $S_{ACD} =$

$= \dfrac{1}{2} AD \cdot CC_1$, $BB_1 = CC_1$,

т.е. $S_{ABD} = S_{ACD}$.

б) $S_{ABO} = S_{ABD} - S_{AOD}$; $S_{CDO} = S_{ACD} - S_{AOD}$; $S_{ABO} = S_{CDO}$.

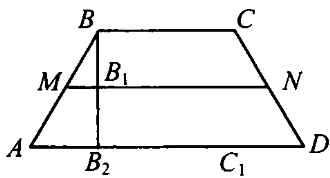
в) В ΔAOB и ΔCOD вертикальные углы $\angle AOB = \angle DOC$, следовательно $\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDO}} = \dfrac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$, т. е. $1 = \dfrac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$, т. е.

$AO \cdot OB = CO \cdot OD$, ч.т.д.

512. **Дано:** $ABCD$ – трапеция;

$BC = a$, $AD = b$; $MN \| AD$;

$S_{AMND} = S_{MBCN}$; $MN = ?$



Решение.

Пусть $MN = x$ см, тогда

$S_{AMND} = \dfrac{1}{2}(b + x)(h - h_1) = \dfrac{1}{2}(x + a)h_1$, т. е. $(h - h_1(b + x) =$

$= (x + a)h_1$; $h(b + x) = (a + b + 2x)h_1$,

$S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{MBCN}$. т.е. $\dfrac{1}{2}\ (a + b)h = (b + x)(h - h_1) +$

$+ \dfrac{1}{2}(x + a)h_1$ или $(a + b)h = (b + x)h + (a - b)h_1$; $(a - x)h = (a - b)h_1$.

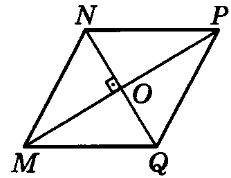
Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} (b+x)\cdot h = (a+b+2x)\cdot h_1 \\ (a-x)\cdot h = (a-b)\cdot h_1 \end{cases}; \ (a - x)(a + b + 2x) = (b + x)(a - x);$$

$a^2 + ab + 2ax - ax - bx - 2x^2 = ab + ax - b^2 - bx$, $a^2 - 2x^2 + b^2 = 0$;

$2x^2 = a^2 + b^2 = 0$; т.е. $x^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$; $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

513. **а)** В ромбе $MNPQ$ диагонали пересекаются в точке O. $NO \perp MP$ и $MO \perp QN$; $NO = OQ$; $MO = OP$. Рассмотрим ΔMON: $MO = \frac{1}{2}MP = 9$ м;

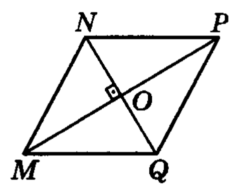


$NO = \frac{1}{2}NQ = 12$ м. По теореме Пифагора: $MN^2 = MO^2 + ON^2$; $MN = \sqrt{9^2+12^2} = 15$ (м). Тогда: $P_{MNPQ} = 4 \cdot MN = 60$ м.

б) Расстояние между параллельными сторонами ромба равно его высоте h. $S_{MNPQ} = MN \cdot h$, но $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP \cdot NQ$ (согласно задаче 476), получаем: $MN \cdot h = \frac{1}{2}MP \cdot NQ$; $h = \dfrac{\frac{1}{2}MP \cdot NQ}{MN}$;

$h = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 18 \cdot 24}{15}$; $h = 14{,}4$ м.

514. Имеем ромб $MNPQ$. Его диагонали MP и NQ пересекаются в точке O. $MP = 4{,}5$ дм (по условию).



$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP \cdot NQ$, тогда

$NQ = \dfrac{2S_{MNPQ}}{MP} = \dfrac{2\cdot 540}{45} = 24$ см.

Рассмотрим прямоугольный ΔMON. $MO = 22{,}5$ см, $ON = 12$ см.

По теореме Пифагора: $MN = \sqrt{22{,}5^2 + 12^2} = 25{,}5$ см.

Имеем: $S_{MNPQ} = MN \cdot H$; отсюда $H = \dfrac{S_{MNPQ}}{MN} = \dfrac{540}{22{,}5} = 21\frac{3}{17}$ и

$h = \frac{1}{2}H$; $h = 21\frac{3}{17} : 2 = 10\frac{10}{17}$ см.

515. **а)** ΔABC, $AB = BC = 20$см, $\angle A = 30°$; $S_{ABC} = ?$

Из ΔABM: $\angle H = 90°$, $\angle A = 30°$, следовательно,

$BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}20\sqrt{3} \cdot 10 = 100\sqrt{3}$ см; $AH^2 = AB^2 - BH^2 =$

$= 400 - 100 = 300$, $AH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ см, значит $AC = 20\sqrt{3}$ см.

б) ΔABC, $AB = BC$; $AH \perp BC$, $AH = 6$ см, $\angle CAH = 45°$; $S_{ABC} = ?$

В ΔAMC: $\angle H = 90°$, $\angle A = 45°$, значит, $\angle C = 45°$, следовательно, $AH = HC = 6$ см;

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 36 + 36 = 72$, следовательно $AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

$\angle C = 45°$ и $AB = BC$, следовательно $\angle BAC = 45°$, значит ΔABC – прямоугольный, значит, AH и AB совпадают, следовательно,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ м^2.

Ответ: 18 см^2.

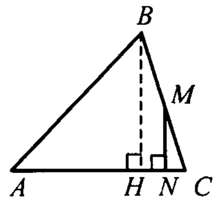
516. $BH \perp AC$; из ΔBCH: $BM = MC$, $MN \parallel BH$, значит, $NC = NH = 15$ см;

Из ΔBCH: $BC^2 = BH^2 + HC^2$, т.е.

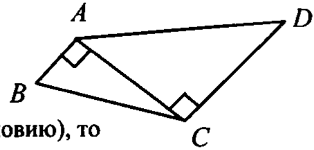
$BH^2 = BC^2 - HC^2$; $BH^2 = 34 - 30 = 256$,

$BH = \sqrt{256} = 16$ см;

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 16 = 320$ см^2.



517. $BC^2 = BA^2 + AC^2$, т. е.
$AC^2 = BC^2 - BA^2$.
Т. к. $AB^2 = 25$, $BC^2 = 169$ (по условию), то $AC^2 = 169 - 25 = 144$.



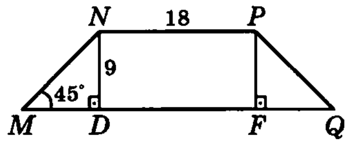
Т. к. $CD^2 = 81$, $AD^2 = 225$ (по условию), то
$AC^2 = 225 - 81 = 144$,
следовательно, ΔABC и ΔACD – прямоугольные, имеющие общую сторону $AC = 12$ см.

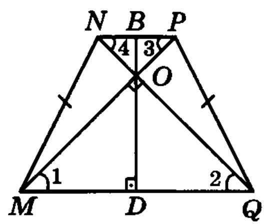
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AB \cdot AC + \frac{1}{2}AC \cdot CD;$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5 \cdot 14 + 9 \cdot 14) = 98 \text{ см}^2.$$

<u>**Ответ:**</u> 98 см^2.

518. а) Равнобедренная трапеция $MNPQ$, где $NP = 18$ см; $ND = 9$ см; $\angle M = 45°$; $ND \perp MQ$. Тогда ΔMND – прямоугольный: $\angle M = 45°$, значит, ΔMND – равнобедренный, $MD = DN = 9$ см. $MNPQ$ – равнобедренная трапеция (по условию), поэтому $MD = FQ = ND = 9$ см. Найдем $MQ = 2MD + DF =$ $= 2 \cdot 9 + 18 = 36$ см. Получаем:





$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP) \cdot ND;$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot (18 + 36) \cdot 9 = 243 \text{ см}^2.$$

б) Равнобедренная трапеция $MNPQ$, где $NP = 16$ см; $MQ = 30$ см; $MP \perp NQ$; O – точка пересечения диагоналей; BD – высота трапеции, проходящая через точку O.
Рассмотрим ΔMNQ и ΔMPQ: $MN = PQ$ (по условию); MQ – общая сторона; $\angle M = \angle Q$, а значит, и $\angle 1 = \angle 2$.
Отсюда $\Delta MNQ = \Delta MPQ$.
Рассмотрим ΔMOQ и ΔNOP: $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$ ($MQ \parallel NP$),

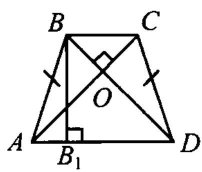
но $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle 4 = \angle 3$, т. е. ΔMOQ и ΔNOP – равнобедренные. Но $MP \perp NQ$, значит, они прямоугольные.
Высоты OD и OB являются и медианами, поэтому (задача 404) $OD = \frac{1}{2}MQ$; $OB = \frac{1}{2}NP$, т. е. $BD = \frac{1}{2}(MQ + NP) =$
$= \frac{1}{2}\cdot(30 + 16) = 23$ см. $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)\cdot BD = 529$ см^2.

Ответ: а) 243 см^2; б) 529 см^2.

519. **Дано:** $ABCD$ – трапеция; $AC \perp BD$; $BB_1 \perp AD$, $BB_1 = h$; $S_{ABCD} = ?$
Решение.
Проведем: $DD_1 \perp BC$, имеем BB_1DD_1 – прямоугольник;
$S_{B_1BD_1} = S_{ABCD}$ (т.к. $S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta CDD_1}$, S_{B_1BCD} – общая).
BB_1DD_1 – квадрат: т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $AC = B_1D_1$;
из $BD \perp AC$, $AC \| B_1D_1$ следует, что $BD \perp B_1D_1$, $BD = B_1D_1$,
но т.к. четырехугольник, диагонали которого равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам – квадрат, то $BB_1 = BD_1 = h$; $S_{B_1BD_1D} = S_{ABCD} = h^2$.

Ответ: h^2.

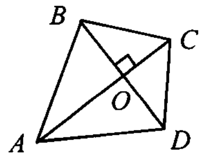
520. **Дано:** $ABCD$ – равнобедренная трапеция; $AC \perp BD$, $AB = CD$; $AD + BC = 2a$; $S_{ABCD} = ?$



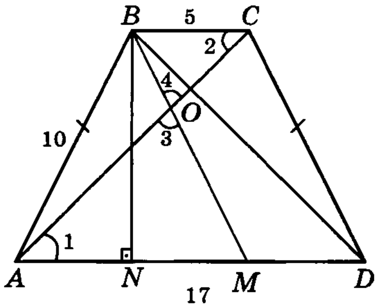
Решение.
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)\cdot BB_1$,
$S_{ABCD} = BB_1{}^2$ (см. 519), следовательно,
$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot BB_1 = BB_1{}^2$, где $a = BB_1$, т.е. $S_{ABCD} = a^2$.

Ответ: $S_{ABCD} = a^2$.

521. Рассмотрим ΔAOB, ΔBOC и ΔAOD.
$AD^2 + BC^2 = (AO^2 + OD^2) + (BO^2 + OC^2) =$
$= (AO^2 + BO^2) + (OD + OC^2) = AB^2 + CD^2$
(по теореме Пифагора).



522. BM пересекает AC в точке O, причем $AO = OC$. Рассмотрим ΔAOM и ΔBOC. $AO = OC$; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$. Значит, $\Delta AOM = \Delta BOC$; $AM = BC = 5$ см. Отсюда $MD = 12$ см.



$AN = \dfrac{AD - BC}{2}$ (т. к. трапеция $ABCD$ равнобедренная) $AN = 6$ см. По теореме Пифагора: $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = 8$ см.

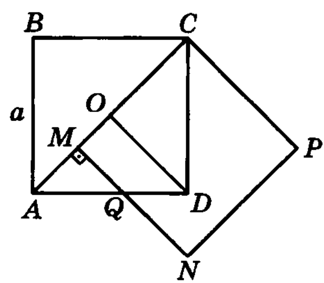
$S_{\Delta BDM} = \dfrac{1}{2} MD \cdot BN = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ см^2.

Ответ: 48 см^2.

523. Даны два квадрата $ABCD$ и $MCPN$, где $AB = CM = a$. Надо найти S_{CMQD}.

$S_{CMQD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AMQ}$.

Вычислим эти площади.



$S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{2} a \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$. Рассмотрим ΔAMQ. Он прямоугольный, $\angle MAQ = 45°$, значит, ΔAMQ – равнобедренный:

$AM = MQ = AC - MC = a\sqrt{2} - a = (\sqrt{2} - 1)\,a$.

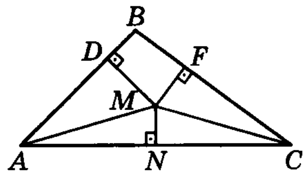
Имеем: $S_{\Delta AMQ} = \dfrac{1}{2} MQ^2 = \dfrac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot a^2 = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \cdot a^2$ и

$S_{CMQD} = \dfrac{a^2}{2} - \cdot \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\, a^2 = a^2 (\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: $a^2 (\sqrt{2} - 1)$.

524. Решение приведено в учебнике.

525. Получаем:



$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$ (см^2) – по теореме Герона. Проведем высоты MD, MF и MN в треугольниках ABM, BMC, AMC.

$MD = 6$ см; $MN = 2$ см.

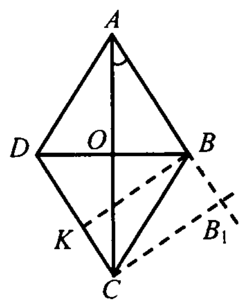
$S_{ABC} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BMC} =$

$= \frac{1}{2} AC \cdot MN + \frac{1}{2} AB \cdot BM + \frac{1}{2} BC \cdot FM.$

$84 = \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 2 + 13 \cdot 6 + 14 \cdot FM)$, откуда $FM = 4\frac{2}{7}$ см.

Ответ: $4\frac{2}{7}$ см.

526. **Дано:** $ABCD$ – ромб, BK – высота.



$BK = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ см, $BK = \frac{2}{3} AC$; S_{ABCD} – ?

$AC = \frac{4\sqrt{2}}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ см.

Решение.

Продолжим сторону AB и проведем к ее продолжению перпендикуляр CB_1.

Из ΔAB_1C: $\sin \angle OAB = \frac{CB_1}{AC} = \frac{2}{3}$.

Из ΔAOB: $\operatorname{tg} \angle OAB = \frac{OB}{OA}$.

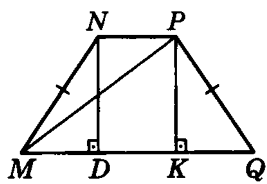
Тогда $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = \frac{OB}{\sqrt{2}/3}$; $\frac{\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)} = \frac{3OB}{\sqrt{2}}$;

$$\frac{\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}}=\frac{3OB}{\sqrt{2}};\ \frac{2/3}{\sqrt{1-4/9}}=\frac{3OB}{\sqrt{2}};\ \frac{3OB}{\sqrt{2}}=\frac{2/3}{\sqrt{5}/3};$$

$$OB=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\text{ см.}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AC\cdot OB=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}=\frac{8}{9\sqrt{5}}\text{ см}^2.$$

527. $MP = 10$ см; $ND = 6$ см; $MN = PQ$ (по условию). Рассмотрим прямоугольный ΔMPK. По теореме Пифагора $MK=\sqrt{MP^2-PK^2}=8$ см. $MD = KQ$ (т. к. трапеция $MNPQ$ – равнобедренная). $DK = NP$.



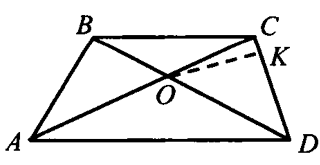
Получаем: $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MQ+NP)\cdot D$. Учтем, что

$\frac{1}{2}(MQ+NP)=\frac{1}{2}(DK+2MD+DK)=MK$, тогда

$S_{MNPQ}=MK\cdot ND=8\cdot 6=48$ см^2.

<u>**Ответ:**</u> 48 см^2.

528. Пусть h – высота трапеции.



Тогда $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot h$.

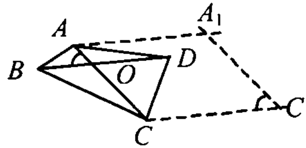
$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta AOD}$. $S_{\Delta COD}=$
$=S_{\Delta ACD}-S_{\Delta AOD}$.

Значит $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}$.

$S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}CD\cdot OK=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$ см^2.

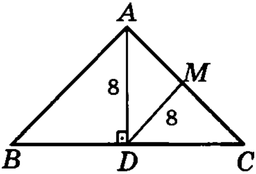
Значит $S_{\Delta AOB}=30$ см^2.

529. Построим $AA_1 \parallel BD$ и $A_1C_1 \parallel AC$; $CC_1 \parallel AA_1$ и $\angle CC_1A = \angle AOB = 30°$. Таким образом, AA_1C_1C – параллелограмм с острым углом 30°.



$$S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2} \cdot CC_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin \angle CC_1A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 80 \text{ см}^2.$$

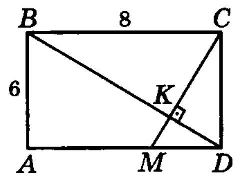
530. Рассмотрим ΔADC. $AD \perp BC$. Поэтому ΔADC – прямоугольный. Отсюда $DM = \frac{1}{2}AC$ (задача 404), $AC = 16$ см. По теореме Пифагора $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 8\sqrt{3}$ см.



ΔABC – равнобедренный (по условию). AD – высота и медиана, значит, $BC = 2DC = 16\sqrt{3}$ см. $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 8 \cdot 8 = 64 \text{ см}^2$.

Ответ: 64 см^2.

531. Рассмотрим ΔABD:
$S_{\Delta ABD} = S_{ABKM} + S_{\Delta KMD}$, $S_{AMKM} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta KMD}$; $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2$. Рассмотрим ΔBCD:



CK – высота, проведенная к гипотенузе BD. Найдем площадь этого треугольника: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BC$; $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot KC$ или

$$\frac{1}{2} CD \cdot BC = \frac{1}{2} BD \cdot KC, \text{ тогда } CK = \frac{CD \cdot BC}{BD}.$$

По теореме Пифагора $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 10$ см.

Получаем: $CK = \dfrac{CD \cdot BC}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = 4{,}8$ см.

Находим: $KD=\sqrt{CD^2-CK^2}=\sqrt{6^2-4{,}8^2}=3{,}6$ см.

В ΔCDM KD является высотой, проведенной к гипотенузе CM.

Отсюда: $KD=\dfrac{CD\cdot DM}{\sqrt{CD^2+DM^2}}$ или $3{,}6=\dfrac{6\cdot DM}{\sqrt{6^2+DM^2}}$;

$3{,}6\sqrt{36+DM^2}=6\cdot DM$. Тогда находим: $DM=4{,}5$ см.

Теперь получаем величину KM: $KM=\sqrt{DM^2-KD^2}=2{,}7$ см

(по теореме Пифагора). Тогда: $S_{\Delta KMD}=\dfrac{1}{2}KM\cdot KD=$

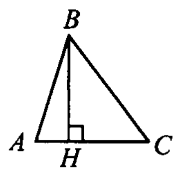
$=\dfrac{1}{2}\cdot 2{,}7\cdot 3{,}6=4{,}86$ см^2 и $S_{ABKM}=24$ см$^2-4{,}86$ см$^2=19{,}14$ см^2.

Ответ: 19,14 см^2.

532. а) $BC^2=CH^2+BH^2=(AC-AH)^2+AB^2-AH^2=$

$=AC^2-2AC\cdot AH+AH^2+AB^2-AH^2=$

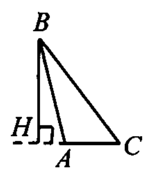
$=AB^2+AC^2-2AC\cdot AH$, ч.т.д.



б) $BC^2=CH^2+BH^2=(AC+AH)^2+AB^2-AH^2=$

$=AC^2+2AC\cdot AH+AH^2+AB^2-AH^2=$

$=AB^2+AC^2+2AC\cdot AH$, ч.т.д.



Глава VII.
Подобные треугольники

§ 1 Определение подобных треугольников

533. $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{150\text{ мм}}{200\text{ мм}}=\dfrac{3}{4}$; отношение не изменится.

534. а) $AB = 12$ ед., $CD = 6$ ед. $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$; $M_1M_2 = 2$ ед.; $MM_1 = 2$ ед.;

$\dfrac{MM_1}{M_1M_2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, т. е. $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{MM_1}{M_1M_2}$ – пропорциональны;

б) $AB = 9$ ед., $BC = 3$ ед., $CD = 6$ ед.
$MM_2 = 3$ ед., $MM_1 = 1$ ед., $M_1M_2 = 2$ ед.

$\dfrac{AB}{MM_2}=3$; $\dfrac{BC}{MM_1}=3$; $\dfrac{CD}{M_1M_2}=3$,

т. е. $\dfrac{AB}{MM_2}\neq\dfrac{BC}{MM_1}\neq\dfrac{CD}{M_1M_2}$ – пропорциональны.

в) $AB = 9$ ед., $BD = 9$ ед.; $MM_1 = 1$ ед; $M_1M_2 = 2$ ед;

$\dfrac{AB}{MM_1}=9$; $\dfrac{BD}{M_1M_2}=4{,}5$, т. е. $\dfrac{AB}{MM_1}\neq\dfrac{BD}{M_1M_2}$ – не пропорциональны.

535. Решение приведено в учебнике.

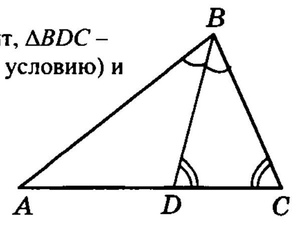
536. а) По условию BD – биссектриса ΔABC. Значит $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}$, и

$AB=\dfrac{AD\cdot BC}{DC}=15$ см.

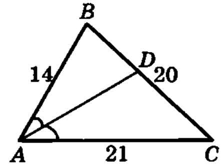
б) $\angle BDC = \angle C$ (по условию), значит, ΔBDC – равнобедренный: $BD = BC = 16$ (по условию) и

$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}$;

$DC=\dfrac{AD\cdot BC}{AB}=\dfrac{20\cdot 16}{30}=10\dfrac{2}{3}$.



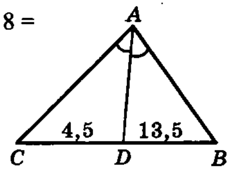
537. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ и $DC = BC - BD = 20 - BD$.



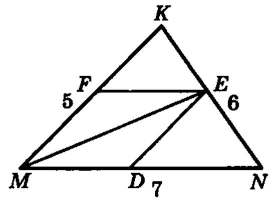
Имеем: $\frac{BD}{20 - BD} = \frac{14}{21}$, отсюда получаем

$21 \cdot BD = 14 \cdot (20 - BD)$, тогда $BD = 8$ см;
$DC = BC - BD = 20 - 8 = 12$ см.

538. $BC = CD + BD = 18$ см и $AB + AC = 42 - 18 =$
$= 24$ см. Имеем: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 3$, отсюда получаем $AB = 3AC$. Тогда $3AC + AC =$
$= 24$ см и $AC = 6$ см, $AB = 18$ см.



539. Проведем ME – диагональ ромба, которая делит $\angle M$ пополам. Значит, ME – биссектриса ΔMKN. Тогда: $\frac{NE}{EK} = \frac{MN}{MK}$; $EK = KN - NE$;



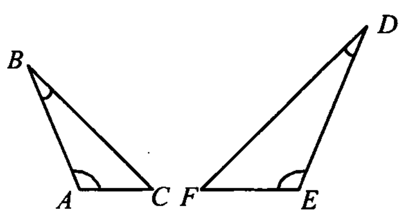
$EK = 6 - NE$. Имеем: $\frac{NE}{6 - NE} = \frac{7}{5}$,

отсюда: $NE = 3,5$ см и $EK = 6 - 3,5 = 2,5$ см.

540. Проведем диагональ DF ромба $DMFN$. Она является и биссектрисой ΔCDE. Получаем: $\frac{CD}{DE} = \frac{CG}{FE}$, отсюда $CD = \frac{2}{3}DE$.
$CE = FE + CF = 20$ см. $P_{\Delta CDE} = 55$ см и $CD + DE = 55 - CE$, т. е.
$CD + DE = 35$ см. Но $CD = \frac{2}{3}DE$, отсюда $\frac{2}{3}DE + DE = 35$ см;
$DE = 21$ см и $CD = 14$ см.

<u>**Ответ**</u>: $DE = 21$ см, $CD = 14$ см.

541. 1) $\angle A = \angle E = 106°$,
$\angle B = \angle D = 34°$,
$\angle C = \angle F = 40°$, т. е.
все углы соответственно равны.

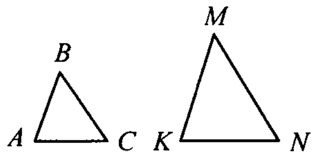


2) $\frac{AC}{FE}=\frac{4,4}{13,2}=\frac{1}{3}$; $\frac{AB}{DE}=\frac{5,2}{15,6}=\frac{1}{3}$;

$\frac{BC}{DF}=\frac{7,6}{22,8}=\frac{1}{3}$. $\frac{AC}{FE}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{DF}$.

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$, т. к. стороны соответственно пропорциональны с коэффициентом $k=\frac{1}{3}$ углы соответственно равны.

542. $\Delta ABC \sim \Delta KMN$, значит



$\frac{AM}{KM}=\frac{BC}{MN}=\frac{AC}{KN}$;

$\frac{5}{KM}=\frac{5}{MN}=\frac{7}{KN}$.

$\frac{KM}{AB}=2,1$, значит $KM=2,1\cdot 4=8,4$;

$5\cdot 2,1=MN=10,5$; $7\cdot 2,1=KN$; $KN=14,7$.

543. Предположим, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. $AB : A_1B_1 = k$. Проведем высоты к сходственным сторонам AB и A_1B_1. Обозначим их h и h_1, соответственно.

Тогда: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=k^2$ или $\frac{\frac{1}{2}AB\cdot h}{\frac{1}{2}A_1B_1\cdot h_1}=k^2$.

Поэтому $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{h}{h_1}$, что и требовалось доказать.

544. <u>**Дано:**</u> $S_{ABC}=75$ м^2; $S_{A_1B_1C_1}=300$ м^2; $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;

$A_1C_1=9$ м; $AC=?$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{75}{300}=k^2$; $k^2=\frac{1}{4}$; $k=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$, где $A_1C_1=9$ м, т. е. $AC=4,5$ м.

545. Пусть $S_{A_1B_1C_1} = x$ см^2, тогда $S_{ABC} = (x + 77)$ см^2.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом $k = \dfrac{6}{5}$, тогда

$$\frac{x+77}{x} = \left(\frac{6}{5}\right)^2,$$

$25(x + 77) = 36x$, $x = 175$; $S_{ABC} = 252$ см^2, $S_{A_1B_1C_1} = 175$ см^2.

546. $\dfrac{87{,}5}{S} = k^2$; $k = \dfrac{1}{100\,000}$ и $S = 87{,}5$ км^2.

547. **Дано:** $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом k.

Доказать: $\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$.

Доказательство.

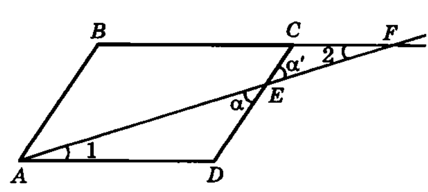
$A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$$

$$= \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k, \text{ ч.т.д.}$$

548. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{140}{56} = 2{,}5$; $\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 2{,}5$.

549. $\dfrac{P}{P_1 = k}$, но $k = \dfrac{15+20+30}{26} = 2{,}5$. Поэтому стороны треугольника, подобного данному в k раз меньше сторон данного треугольника.

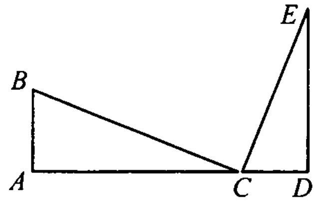


15 : 2,5 = 6 (см);
20 : 2,5 = 8 см;
30 : 2,5 = 12 см.

Ответ: 6 см, 8 см, 12 см.

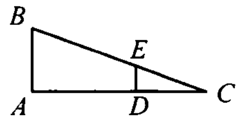
§ 2 Признаки подобия треугольников

550. 1) Из условия следует, что $\angle C = \angle E = \alpha$, $\angle A = \angle D = 90°$, значит $\Delta ABC \sim \Delta DCE$ (по двум углам), следовательно $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DC}$; $\frac{8}{6} = \frac{12}{ED}$, $ED = 9$.



2) $\angle A = \angle D = 90°$, $\angle C$ – общий, значит $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (по двум углам). По теореме Пифагора

$DE = \sqrt{100 - 64}$, $DE = 6$;



$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$; $\frac{AB}{6} = \frac{28}{8}$; $AB = 21$.

551. Рассмотрим ΔECF и ΔAED: $\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные), $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие), поэтому ΔECF подобен ΔAED (по первому признаку).

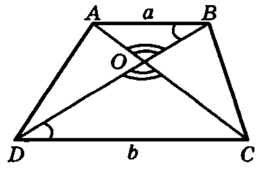
а) $\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}$; $FC = \frac{AD \cdot EC}{DE}$; $FC = \frac{7 \cdot 4}{8} = 3{,}5$ см. $AD = BC$ (т. к. $ABCD$ – параллелограмм). Имеем: $\frac{EF}{AE} = \frac{FC}{AD}$, но $\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}$,

то $\frac{EF}{AE} = \frac{EC}{DE}$; $EF = \frac{AE \cdot EC}{DE}$; $\frac{10 \cdot 4}{8} = 5$ см.

б) $\frac{EC}{DE} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{5}$; $EC = \frac{2}{5} DE$; $DE = AB - CE$; $DE = 5\frac{5}{7}$ см;

$EC = \frac{2}{5} DE$; $EC = 2\frac{2}{7}$ см.

552. Рассмотрим ΔCOD и ΔAOB. Они подобны по двум углам. Отсюда следует: $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$.



а) $AB = \dfrac{DC \cdot BO}{OD} = 10$ см. **б)** $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{a}{b}$.

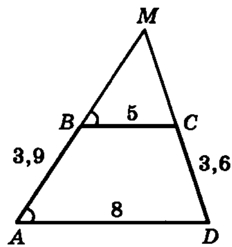
в) $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{AO}{OC}$; $OC = AC - AO$; $AO = 12$ см.

553. **а)** Да; **б)** да; **в)** да.

Треугольники равнобедренные, имеют по одному равному углу, следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника и теореме о сумме углов треугольника, находим другие углы, т. е.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по двум углам).

554. По условию $AD = 8$ см, $BC = 5$ см, $CD = 3{,}6$ см, $AB = 3{,}9$ см.

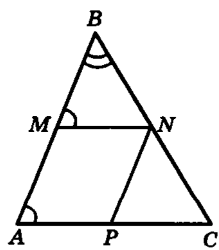


Рассмотрим ΔAMD и ΔBMC. Они подобны (по двум углам). Отсюда следует: $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{MB}{MA}$; $MA = MB + 3{,}9$;

$\dfrac{5}{8} = \dfrac{MB}{MB + 3{,}9}$; $MB = 6{,}5$ см. Так же

получаем: $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{BC}{AD}$; $MC = 6$ см.

555. **а)** Четырехугольник $AMNP$ является параллелограммом (стороны взаимно параллельны). Тогда $AM = NP$, $MN = AP$ и $AM : MN = 2 : 3$.



Рассмотрим ΔABC и ΔMBN. Они подобны (по двум углам). Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MN}; \frac{AB}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \frac{2}{3} = \frac{10 - AM}{MN}; \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{MN} - \frac{AM}{MN},$$

но $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{2}{3}$ тогда $\dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{MN} - \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{MN}$; $MN = 7{,}5$ см.

$AM = \dfrac{2}{3} \cdot MN = 5$ см; $MN = AP = 7{,}5$ см; $AM = NP = 5$ см.

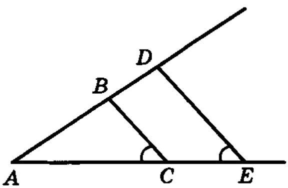
б) $\frac{AM}{AP}=\frac{AM}{MN}$ (т. к. $AM=AP$), значит, $\frac{AM}{AP}=\frac{AM}{MN}=1$.

$\frac{a}{b}=\frac{a-AM}{MN}$; $\frac{a}{b}=\frac{a}{MN}-1$ и $MN=\frac{ab}{a+b}$. По условию

$AM=AP$, значит, $AM=NP=MN=\frac{ab}{a+b}$.

556. Решение приведено в учебнике.

557. а) $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$ (задача 556) – теорема Фалеса. $AC=\frac{CE\cdot AB}{BD}$;



$AB=AD-BD=14$ см и

$AC=\frac{14\cdot 10}{8}=17{,}5$ см.

б) $BD=\frac{CE\cdot AB}{AC}$; $BD=\frac{4\cdot 10}{8}=5$ см.

Рассмотрим ΔABC и ΔADE. Они подобны (по двум углам), отсюда $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$; $DE=\frac{AE\cdot BC}{AC}$ и

$DE=\frac{(AC+CE)\cdot BC}{AC}=\frac{(8+4)\cdot 4}{8}=6$ см.

в) $AB:BD=2:1$ (по условию). $AB=2BD$.

$\frac{AD}{AB}=\frac{AB+BD}{AB}=\frac{3BD}{2BD}=\frac{3}{2}$.

$\Delta ABC\sim\Delta ADE$: $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$; $\frac{12}{BC}=\frac{3}{2}$; $BC=\frac{12\cdot 2}{3}=8$ см.

558. 1) Проведем $c\|b$ так, что $A\in C$, B_2, $C_2\in c$.

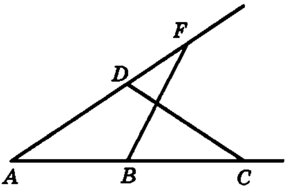
2) В ΔABB_2 и ΔACC_2: $\angle A$ – общий;

$\angle C=\angle B$ (соответственные при $BB_1\|CC_1$ и секущей AC),

$\Delta ABB_2\sim\Delta ACC_2$ по двум углам, значит $\frac{AB}{AB_2}=\frac{BC}{B_2C_2}$.

По свойству параллелограмма имеем: $AB_2=A_1B_1$, $B_2C_2=B_1C_1$, следовательно, $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$; по свойству пропорции $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{AB}{BC}$, ч.т.д.

559. Исходя из условия $AB : AD = 5 : 8$ и $AF : AC = 10 : 16$ или $AF : AC = 5 : 8$. Отсюда $\frac{AB}{AD}=\frac{AF}{AC}$, т. е. стороны ΔADC и ΔAFB пропорциональны, $\angle A$ – общий. Значит, $\Delta ACD \sim \Delta AFB$ (по второму признаку подобия треугольников).



560. а) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{3}{4{,}5}=\frac{2}{3}$; $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{5}{7{,}5}=\frac{2}{3}$; $\frac{CA}{C_1A_1}=\frac{7}{10{,}5}=\frac{2}{3}$. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (третий признак подобия треугольников).

б) Аналогично $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по третьему признаку подобия треугольников):

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{1{,}7}{340}=\frac{1}{200}$; $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{3}{600}=\frac{1}{200}$; $\frac{CA}{C_1A_1}=\frac{4{,}2}{840}=\frac{1}{200}$.

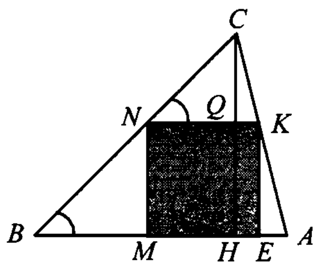
561. **<u>Дано:</u>** ΔABC и ΔMNK. $AB = BC = AC$; $MN = NK = MK$; $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ – ?

<u>Доказательство.</u>

1) Т. к. ΔABC – равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, т. к. ΔMNK – равносторонний, то $\angle M = \angle N = \angle K = 60°$;

2) $\angle M = \angle N = \angle K = \angle A = \angle B = \angle C = 60°$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ по двум углам.

562. В ΔABC и ΔKNC, где $\angle C$ – общий, $\angle N = \angle B$ (соответственные при $AB \parallel NK$ и секущей BC), значит $\Delta ABC \sim \Delta KHC$ по двум углам, т. е. $\frac{CH}{CQ}=\frac{AB}{NK}$ (1).

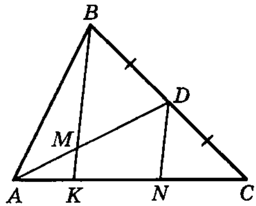


Пусть $MN = NK = KE = ME = x$, тогда $CQ = h - x$

Подставляя в (1), имеем: $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}$.

$a(h - x) = hx$; $ah = hx + ax$; $x\ \frac{ah}{a+h} = MN$.

563. Проведем $DN \parallel BK$.



$\frac{BD}{DC} = \frac{KN}{NC}$; $\frac{AK}{EN} = \frac{AM}{MD}$ (см. № 556), но

$BD = DC$ (по условию), то $KN = NC$.

а) по условию $AM = MD$, тогда

$AK = KN = NC$. $KC = 2KN$ или

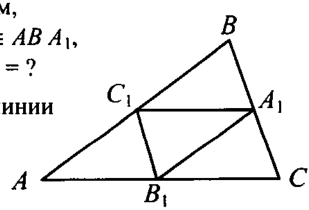
$KC = 2AK$; $\frac{AK}{KC} = \frac{AK}{2AK} = \frac{1}{2}$.

б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$; $\frac{AK}{KN} = \frac{1}{2}$; $KN = 2AK$, но $KN = NC$, значит,

$KC = 4AK$; $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{4}$.

§ 3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

564. Дано: ΔABC, $AB = 8$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_l \in AB$ A_1, B_1, C_1 – середины сторон; $P_{A_1B_1C_1} = ?$



Т. к. A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 – средние линии ΔABC, то

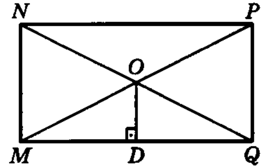
$A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$; $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$;

$A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$; $A_1C_1 = 8{,}5$ см; $B_1C_1 = 2{,}5$ см; $A_1B_1 = 4$ см;

$P_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = 3{,}5 + 2{,}5 + 4 = 10$ см.

Ответ: 10 см.

565. $MNPQ$ – данный прямоугольник: $OD \perp MQ$, $OD = 2{,}5$ см (по условию). $NO = OQ$, $MO = OP$. $MN \parallel OD$. Значит, OD – средняя линия ΔMNQ. Отсюда $MN = 2OD = 5$ см.

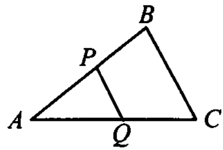


566. <u>**Дано:**</u> ΔABC

$P \in AB$, $AP = PB$; $Q \in AC$, $AQ = QC$; $P_{APQ} = 21$ см; $P_{ABC} = ?$

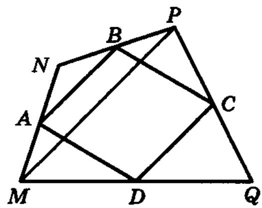
<u>**Решение:**</u>

1) P и Q – середины сторон AB и AC, следовательно, PQ – средняя линия ΔABC, $PQ = \frac{1}{2}BC$;



2) $P_{ABC} = AB + BC + AC = 2AP + 2PQ + 2AQ = 2P_{APQ} = 2 \cdot 21 = 42$ см.

567. $MNPQ$ – четырехугольник, A, B, C, D – середины его сторон. Проведем диагональ MP в четырехугольнике $MNPQ$. Тогда AB – средняя линия ΔMNP; CD – средняя линия ΔMPQ.



$AB \parallel MP$; $AB = \frac{1}{2}MP$; $CD \parallel MP$;

$CD = \frac{1}{2}AC$, или $AB \parallel CD$, $AB = CD$.

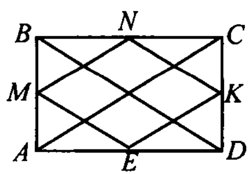
Значит, $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.

568. **а)** <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – прямоугольник; M, N, K, E – середины сторон.

<u>**Доказать:**</u> $MNKE$ – ромб.

<u>**Доказательство:**</u>

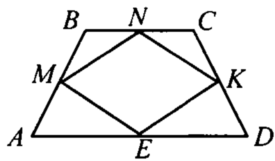
1) ME – средняя линия ΔABD (по определению). Значит, $ME = \frac{1}{2}BD$



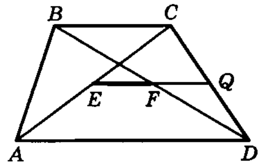
(средняя линия ΔABD) и $ME \| BD$; NK – средняя линия $ABCD$, т. е. $NK = \frac{1}{2}BD$ и $BD \| ME \| NK$. Имеем: $NK = ME = \frac{1}{2}BD$, $ME \| BD \| NK$, значит, $MNKE$ – параллелограмм.

2) Аналогично: $MN = KE = \frac{1}{2}AC$, $MN \| KE \| AC$.

3) По св-ву диагоналей прямоугольника $AC = BD$, значит, $ME = MN$, т. е. $MNKE$ – ромб (по определению), ч.т.д.



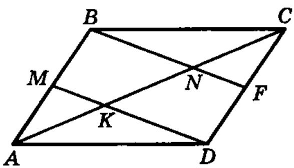
б) <u>Дано:</u> $ABCD$ – равнобедренная трапеция;
M, N, K, E – середины сторон.
<u>Доказать:</u> $MNKE$ – ромб.
<u>Доказательство:</u>
Аналогично доказанному выше: $AC = BD$ – диагонали.



569. $ABCD$ – трапеция: E – середина диагонали AC; F – середина диагонали BD. Через точку E проведем $EQ \parallel AD$. Так как $AE = EC$, то EQ – средняя линия ΔACD, значит, точка Q – середина стороны CD: $EQ = \frac{1}{2}AD$.

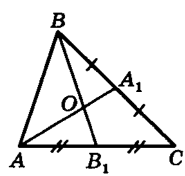
$EQ \parallel BC$, отсюда F – середина BD. FQ – средняя линия ΔBCD, значит, $FQ = \frac{1}{2}BC$. $EF = EQ - FQ = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC =$

$= (AD - BC)$, ч.т.д.



570. Соединим вершину B с серединой стороны CD. Получим точку F. $MB = FD$; $MB \parallel FD$, значит, $MBFD$ – параллелограмм и $MD \parallel BF$. Значит, $BN \parallel MK$.
MK – средняя линия ΔABN (т. к. $AM = MB$ и $BN \parallel MK$). Отсюда $AK = KN$. Аналогично находим $CN = KN$ (из ΔCKD). Значит,

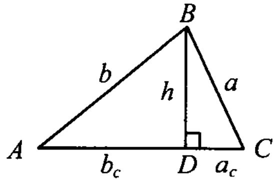
$AK = KN = NC$. $AK = \frac{AC}{3} = 6$ см; $KC = 12$ см.



571. Рассмотрим ΔAOB и ΔAOB_1.
$BO : B_1O = 2 : 1$. ΔAOB и ΔAOB_1 имеют одну общую высоту из вершины A, поэтому $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta AOB_1} = 2 : 1$. $S_{\Delta AOB_1} = S$;
$S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOB_1} = S$.

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABB_1} + S_{\Delta B_1BC}$, но $S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta B_1BC}$ (т. к. BB_1 – медиана), значит, $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABB_1} = 3S$.

572. а) **Дано:** $b_c = 25$, $a_c = 16$; h, a, b = ?



Решение.

1) $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$;

2) $c = b_c + a_c = 25 + 16 = 41$;

3) $b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25} = 5\sqrt{41}$;

4) $a = \sqrt{c \cdot a_c} = 4\sqrt{41}$.

б) **Дано:** $b_c = 36$, $a_c = 64$; h, a, b = ?

Решение.

1) $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$; 2) $c = b_c + a_c = 36 + 64 = 100$;

3) $a = \sqrt{c \cdot a_c} = \sqrt{64 \cdot 100} = 80$; 4) $b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{36 \cdot 100} = 60$.

в) **Дано:** $b = 12$, $b_c = 6$; a, c, a_c = ?

Решение.

1) $b^2 = b_c \cdot c; c = \dfrac{b^2}{b_c}$; 2) $c = b_c + a_c$; $a_c = c - b_c = 24 + 16 = 8$;

3) $a = \sqrt{c \cdot a_c} = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}$.

г) **Дано:** $a = 8$, $a_c = 4$; b, c, b_c = ?

Решение.

1) $a^2 = a_c \cdot c; c = \dfrac{a^2}{a_c} = \dfrac{64}{4} = 16$; 2) $c = b_c + a_c$; $b_c = c - a_c = 16 - 4 = 12$;

3) $b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}$.

д) **Дано:** $a = 6$, $c = 9$; h, b, a_c, b_c = ?

Решение.

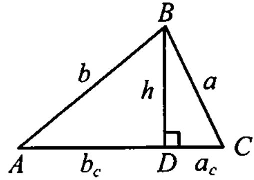
1) $a^2 = a_c \cdot c; c = \dfrac{a^2}{a_c} = \dfrac{36}{9} = 4$; 2) $c = b_c + a_c$; $b_c = c - a_c = 9 - 4 = 5$;

3) $h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$; 4) $b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$.

573. $a^2 = a_c \cdot c;$ $\qquad a_c = a^2 : c = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};$

$b^2 = b_c \cdot c;$ $\qquad b_c = b^2 : c = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

574. 1) $b_c = \dfrac{b^2}{c}$; $a_c = \dfrac{a^2}{c}$, отсюда

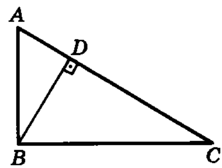


$$h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}} = \frac{ab}{c};$$

2) $b^2 = b_c \cdot c$, т. е. $c = \dfrac{b^2}{b_c}$; $a^2 = a_c \cdot c$,

т. е. $c = \dfrac{a^2}{a_c}$. Итак, $\dfrac{b^2}{b_c} = \dfrac{a^2}{a_c}$, ч.т.д.

575. $AB : BC = 3 : 4$ (по условию),
$AC = 50$ мм; $BD \perp AC$.



Так как $BC = \sqrt{AB \cdot BC}$, то $DC = \dfrac{BC^2}{AC}$.

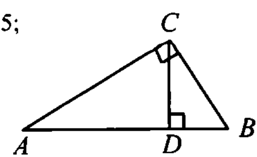
Аналогично, $AD = \dfrac{AB^2}{AC}$ и $\dfrac{AD}{DC} = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$, тогда

$AD = \dfrac{9DC}{16}$ и $AC = AD + DC = DC\left(1 + \dfrac{9}{16}\right) = 50$ мм и

$DC = 32$ мм, $AD = 18$ мм.

576. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $\angle C = 90°$; $AC : BC = 6 : 5$;
$CD \perp AB$, $AD > DB$ на 11 см; $AB = ?$

<u>**Решение:**</u>

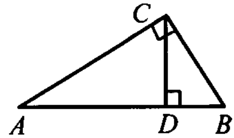


1) $\dfrac{CB^2}{DB} = \dfrac{AC^2}{AD}$.

Пусть $BD = x$ см, тогда $AD = x + 11$ см; $\dfrac{36}{x+11} = \dfrac{25}{x}$;

$36x = 25(x + 11)$; $x = 25$, т.е. $D = 25$ см, $AD = 36$ см;
2) $AB = AD + DB = 25 + 36 = 61$ см.

577. <u>**Дано:**</u> ΔABC; $AB = 5$см, $BC = 12$ см;
$AC = 13$ мм; $BD \perp AC$; AD, $CD = ?$

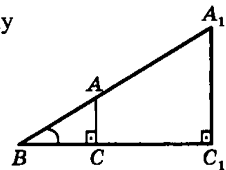


<u>**Решение.**</u>
ΔABC – прямоугольный по теореме Пифагора ($25 + 144 = 169$), $\angle B = 90°$.

$$CD = \frac{CB^2}{AC} = \frac{144}{3} = 11\frac{1}{13};\ AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{25}{13} = 1\frac{12}{13}.$$

578. Решение приведено в учебнике.

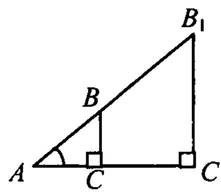
579. $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$ (по двум углам). Поэтому



$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} \text{ и } A_1C_1 = \frac{BS_1 \cdot AC}{BC};$$

$$A_1C_1 = \frac{6{,}3 \cdot 1{,}7}{3{,}4} = 3{,}15 \text{ м.}$$

580. <u>**Дано:**</u> $AC_1 = 10{,}2$ м; $AC = 2{,}5$ м;
$BC = 1{,}7$ м; $B_1C_1 = ?$



<u>**Решение.**</u>
В ΔABC и ΔAB_1C_1 $\angle A$ – общий,
$\angle C_1 = \angle C = 30°$, значит
$\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ по двум углам, тогда

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1};\ B_1C_1 = \frac{1{,}7 \cdot 10{,}2}{2{,}5} = 6{,}936 \text{ м.}$$

581. В ΔABD и ΔEFD: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle E = 90°$, $\angle A = 90°$, значит

$\Delta ABD \sim \Delta EFD$ (по двум углам) и $\dfrac{BD}{FD} = \dfrac{AD}{ED} = \dfrac{AB}{EF}$.

$$AB = AC - BC = 165 - 12 = 153 \text{ см};\ \frac{153}{EF} = \frac{120}{480},\ EF = 153 \cdot 4 = 612 \text{ см.}$$

582. $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ и выполняется равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1};\ AB = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{A_1C_1} = \frac{7{,}2 \cdot 4{,}2}{6{,}3} = 48 \text{ м.}$$

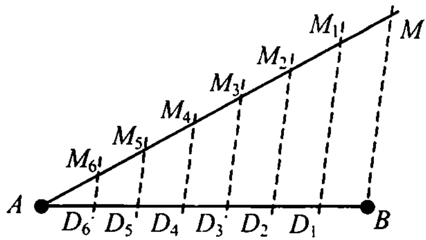
583. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1};\ \frac{AB}{34} = \frac{100}{32};\ AB = \frac{34 \cdot 100}{32} = 106{,}25;$$

$BB_1 = AB - AB_1 = 106{,}25 - 34 = 72{,}25$ м.

584. Решение приведено в учебнике.

585. **а)** Проводим произвольный луч AC, откладываем 7 равных отрезков, соединяем B и M. Через точки $M_1 - M_6$ строим прямые, параллельные прямой BM. По теореме

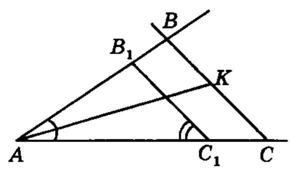


Фалеса точки $D_1 - D_6$ делят отрезок AB на 7 равных частей. Тогда $AD_5 : D_5B = 2 : 5$.

б) Аналогично, но на луче AC откладываем 10 отрезков.

в) Откладываем 7 отрезков.

586. Построим треугольник, подобный искомому. Возьмем произвольный отрезок AC_1. Построим ΔAB_1C_1, где $\angle A$ равен меньшему данному углу, $\angle C_1$ равен большему данному углу.



Проведем биссектрису $\angle A$. Отложим на ней отрезок AK, равный данному. Через точку K надо провести прямую, параллельную B_1C_1. Получим точки B и C при пересечении сторон угла A. ΔABC – искомый.

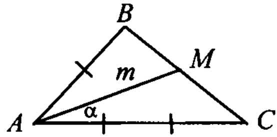
Задача имеет единственное решение, если сумма двух данных углов меньше 180° и не имеет решений, если сумма углов больше или равна 180°.

587. Построим ΔAB_1C_1, где $\angle B_1$ и $\angle C_1$ равны данным углам. Проведем высоту AD_1 и отложим на ней отрезок AD, равный данной высоте. Через точку D проведем прямую, параллельную B_1C_1. Получаем ΔABC – искомый. Задача имеет одно решение (аналогично задаче 586).

588. 1) $\angle A = \alpha$.

2) На одной из сторон угла A отложить два одинаковых отрезка, а на другой – 3 таких же отрезка. Соединить FN.

3) Найти середину NF.



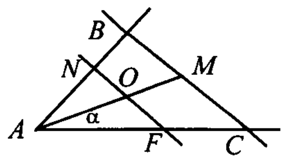
4) На луче AO – отрезок $AM = m$.

5) Через M строим прямую $l \parallel NF$.

6) $l \cap AF = C$; $l \cap AN = B$.

7) ΔABC – искомый:

$\Delta ANF \sim \Delta ABC$, где $\angle A$ – общий;



$\angle B = \angle N$ (соответственные при $NF \parallel BC$ и секущей AB).

$NO = OF$, значит, $BM = MC$, т. е. AM – медиана.

589. См. задачу 586.

590. См. задачу 586.

§ 4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

591. а) $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{17}$; $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \dfrac{15}{17}$; $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{8}{15}$;

$\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \sin A = \dfrac{8}{17}$; $\sin B = \cos A$; $\sin B = \dfrac{15}{17}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{15}{8}$.

б) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 29$; $\sin A = \dfrac{21}{29}$; $\cos A = \dfrac{20}{29}$; $\operatorname{tg} A = \dfrac{21}{20}$;

$\cos B = \dfrac{21}{29}$; $\sin B = \dfrac{20}{29}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{20}{21}$.

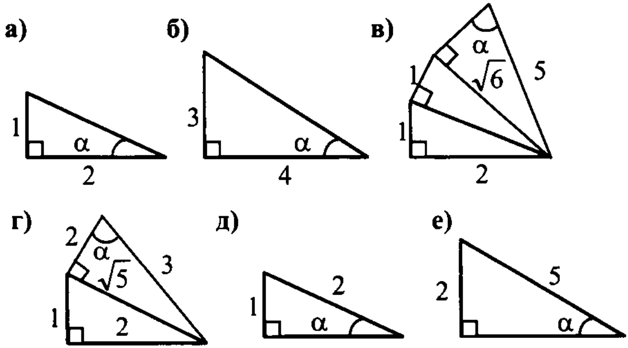
в) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5}$; $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{2}$.

$\sin B = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} B = 2$.

г) $\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{24}{25}$; $\sin B = \cos A = \dfrac{24}{25}$; $\cos B = \sin A = \dfrac{7}{25}$;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{7}{24}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{24}{7}$.

592.



593. а) $\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

б) $\sin \alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

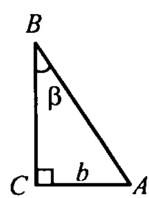
в) $\cos \alpha = \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

г) $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

594. **Дано:** ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle B = \beta$, $AC = b$.

Выразить: BC, $\angle A$, AB.

Решение.



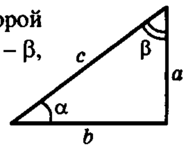
а) $\operatorname{tg} \angle B = \dfrac{AC}{BC}$, т. е.

$BC = \dfrac{AC}{\operatorname{tg} \angle B} = \dfrac{b}{\operatorname{tg} \beta}$; $AB = \dfrac{b}{\sin \beta}$; $\angle A = 90° - \beta$.

б) $BC = \dfrac{10}{\text{tg}\,50^\circ} \approx \dfrac{10}{1{,}1918} \approx 8{,}39$ см;

$\angle A = 40^\circ$; $AB = \dfrac{10}{\sin 50^\circ} \approx \dfrac{10}{0{,}766} \approx 13{,}05$.

595. а) Введем дополнительные обозначения. Второй катет обозначим a, прилежащий к нему угол – β, гипотенуза – c.



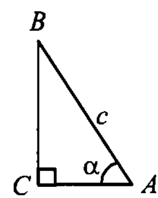
$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$; $\alpha + \beta = 90^\circ$;

$\beta = 90^\circ - \alpha$; $a = b\cdot\text{tg}\,\alpha$; $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$.

б) $a = 12\cdot\text{tg}\,42^\circ$; $a \approx 11$ см; $\beta = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$; $c = \dfrac{12}{\cos 42^\circ}$;

$c \approx 16$ см.

596. __Дано:__ ΔABC, $\angle C = 90^\circ$; $\angle A = \alpha$, $AB = c$;
BC, AC и $\angle B = ?$

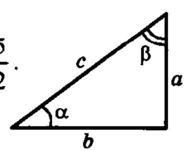


__**Решение.**__
1) $BC = AB \cdot \sin\angle A = c \cdot \sin\alpha$;
$AC = AB \cdot \cos\angle A = c \cdot \cos\alpha$; $\angle B = 90^\circ - \alpha$;
2) $c = 24$ см; $\alpha = 35^\circ$: $BC = 24 \cdot \sin 35^\circ =$
$= 24 \cdot 0{,}5736 \approx 14$ см;
$AC = 24 \cdot \cos 35^\circ = 24 \cdot 0{,}8192 \approx 20$ см; $\angle B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

597. c – гипотенуза, α, β – острые углы.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 19$; $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{12}{15}$. $\text{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{15}{12}$.

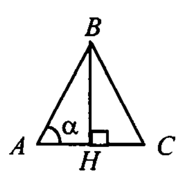
Тогда $\alpha \approx 38^\circ 39'$; $\beta = 51^\circ 21'$.



598. а) __Дано:__ $AB = BC$; $\angle A = \alpha$, $AB = b$; $S_{ABC} = ?$

__**Решение.**__
Из ΔABH: $BH = AB \cdot \sin\angle A = b \cdot \sin\alpha$,
$AH = AB \cdot \cos\angle A = b \cdot \cos\alpha$,

$BH \perp AC$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BH \cdot AC = \dfrac{1}{2} BH \cdot 2 \cdot AH$



(т. к. ΔABC – равнобедренный); значит,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ b^2 \cdot \sin\alpha \cdot 2\cos\alpha = b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

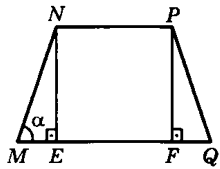
б) **<u>Дано:</u>** $AB = BC$; $\angle A = \alpha$, $AC = a$; $S_{ABC} = ?$

<u>Решение.</u>

Из ΔABH: $BH = AH \cdot \text{tg}\,\angle A = \frac{\alpha}{2}\text{tg}\,\alpha$;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{4}a^2\,\text{tg}\,\alpha.$$

599. $NP = 2$ см; $MQ = 6$ см. $\angle M = \alpha$; $NE \perp MQ$; $PF \perp MQ$. Рассмотрим ΔMNE и ΔFPQ: $MN = PQ$; $NE = PF$; $\angle M = \angle Q$ (т. к. трапеция $MNPQ$ – равнобедренная). Значит, $\Delta MNE = \Delta FPQ$. Поэтому $ME = FQ$. $EF = NP = 2$ см.



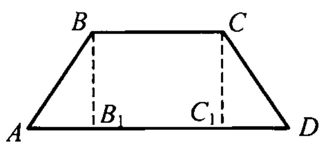
$$ME = \frac{1}{2}(MQ - EF) = 2 \text{ см. } NE = ME \cdot \text{tg}\,\alpha = 2\text{tg}\,\alpha.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\ (MQ + NP) \cdot NE = 8\ \text{tg}\,\alpha \text{ см}^2.$$

600. **<u>Дано:</u>**

$BC = 60$ м; $h = 12$ м;

$\angle A = \angle D = 60°$; $AD = ?$



<u>Решение:</u>

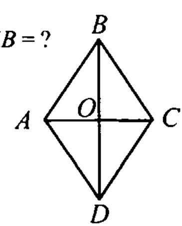
1) ΔABB_1: BB_1: $\cos\angle A = AB_1$,

отсюда $AB_1 = 12 : \text{tg}\,60° = 12 : \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ м;

2) $C_1D = AB_1 = 4\sqrt{3}$ м;

3) $AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 4\sqrt{3} + 60 + 4\sqrt{3} \approx 60 + 13{,}9 = 73{,}9$ м.

601. **<u>Дано:</u>** $ABCD$ – ромб; $AC = 3$, $BD = 2\sqrt{3}$; $\angle A$, $\angle B = ?$



<u>Решение.</u>

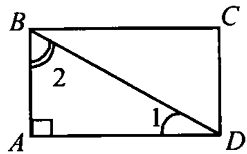
Из ΔAOB: $AO = 1$, $BO = \sqrt{3}$; $\text{tg}\,\angle BAO =$

$= \frac{BO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ значит $\angle BAO = 60°$, т.е.

$\angle ABO = 90° - 60° = 30°$; AC, BD – биссектрисы углов A и B, значит, $\angle B = 60°$, $\angle A = 120°$.

602. **Дано:** $ABCD$ – прямоугольник;

$AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$; $\angle 1$, $\angle 2$ = ?

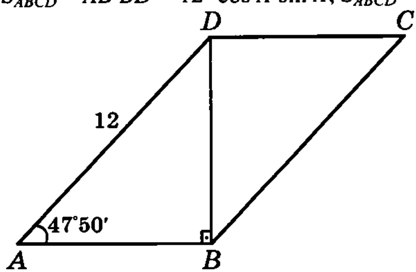


Решение.

Из ΔABD: $\operatorname{tg}\angle 1 = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, т. е.

$\angle 1 = 60°$, значит $\angle 2 = 90° - 60° = 30°$.

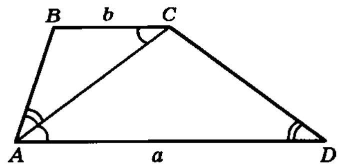
603. $AB = AD \cdot \cos A = 12 \cos 47°50'$; $BD = AD \cdot \sin A = 12 \sin 47°50'$.
$S_{ABCD} = AB \cdot BD = 12^2 \cdot \cos A \cdot \sin A$; $S_{ABCD} \approx 72$ см^2.



604. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$; $\dfrac{6}{A_1B_1} = \dfrac{10}{7{,}5} = \dfrac{9}{B_1C_1}$,

отсюда $A_1B_1 = \dfrac{6 \cdot 7{,}5}{10} = 4{,}5$; $B_1C_1 = \dfrac{9 \cdot 7{,}5}{10} = 6{,}75$.

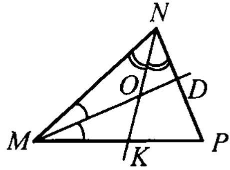
605. $AD = a$; $BC = b$.



$\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Значит, углы этих треугольников равны: $\angle BCA = \angle CAD$ (как накрест лежащие при $AD \parallel BC$); AB не параллельна CD, поэтому $\angle BAC \neq \angle ACD$, значит, $\angle BAC = \angle CDA$ и $\angle ABC = \angle DCA$.

Имеем равенство: $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$; $\dfrac{AC}{a} = \dfrac{b}{AC}$, $AC^2 = ab$, ч.т.д.

606. Т.к. NK – биссектриса,



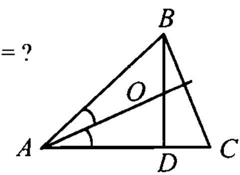
$\frac{MN}{MK} = \frac{NP}{KP}$; $\frac{5}{MK} = \frac{3}{KP}$.

Пусть $MK = x$, тогда $KP = 7 - x$. Имеем: $\frac{5}{x} = \frac{3}{7-x}$; $35 - 5x = 3x$;

$x = MK = 4\frac{3}{8}$ см.

MD – биссектриса, значит $\frac{MK}{KO} = \frac{MN}{NO}$; по свойству пропорций $\frac{MK}{M} = \frac{KO}{NO} = \frac{4\frac{3}{8}}{5} = \frac{35}{8 \cdot 5} = \frac{7}{8}$.

607. **Дано:** ΔABC; $AB = BC$; $BD \perp AC$, $BD = 30$ см; AO – биссектриса; BO, OD = ?



Решение.

В ΔABC: $AB : AD = 3 : 2$, $AD = 2x$, $AB = 3x$;

$AB^2 = AD^2 + BD^2$; $4x^2 + 900 = 9x^2$;

$x^2 = 180$; $x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ см,

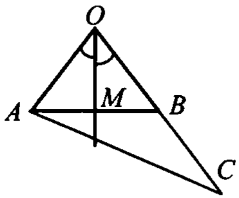
значит, $AB = 18\sqrt{5}$ см, $AD = 12\sqrt{5}$;

AO – биссектриса, следовательно, $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}$.

Пусть $DO = x$, тогда $BO = 30 - x$, значит, $\frac{18\sqrt{5}}{30-x} = \frac{12\sqrt{5}}{x}$;

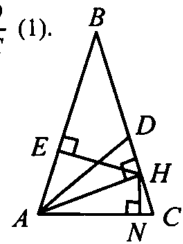
$3x = 2(30 - x)$; $x = 12$; т. е. $DO = 12$ см, $BO = 30 - 12 = 18$ см.

608. Т. к. OM – биссектриса, $\frac{OM}{AM} = \frac{OC}{MC} = \frac{OB+BC}{MC}$; $AO < (OB + BC)$;



$\frac{OM}{AM} = \frac{OB+BC}{MC}$, значит $AM < MC$, ч.т.д.

609. AH – высота ΔABD и ΔACD, т. е. $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$ (1).



Так же $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BT \cdot AC$, имеем: $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot BD}{DN \cdot AC}$.

Сравнивая (1) и (2) имеем:

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot BD}{DN \cdot AC}$, т. к. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ – по условию.

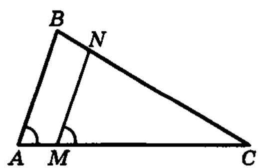
$1 = \frac{DE}{DN}$, значит, $DE = DN$, AD – биссектриса (по свойству).

610. $AM : MC = 2 : 7$, $MN \parallel AB$ (по условию). Тогда: $AM = AC - MC$;

$AM = 21{,}6 - MC$.

$\frac{AM}{MC} = \frac{21{,}6 - MC}{MC} = \frac{2}{7}$ откуда

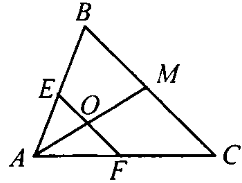
$MC = 16{,}8$ см.



$\Delta MNC \sim \Delta ABC$ (по двум углам; $\angle A = \angle M$, т. к. $AB \parallel MN$). Имеем:

$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}$; $\frac{MN}{10} = \frac{16{,}6}{21{,}6}$; $MN = 7\frac{7}{9}$ см;

$\frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}$; $\frac{NC}{18} = \frac{16{,}8}{21{,}6}$; $NC = 14$ см.

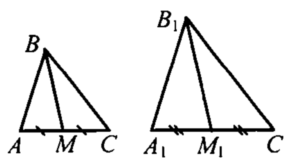


611. В ΔAOF и ΔAMC $\angle A$ – общий;
$\angle C = \angle F$ (соответственные при $EF \parallel MC$), значит
$\Delta AOF \sim \Delta AMC$ по двум углам, т. е.
$\frac{OF}{MC} = \frac{AO}{AM}$. Отсюда

$OF = \frac{OA \cdot MC}{AM}$ (1).

В ΔAOE и ΔAMB $\angle A$ – общий, $\angle B = \angle E$ (соответственные при $EF \parallel BC$), значит $\Delta AOE \sim \Delta AMB$ по двум углам, т. е.
$\frac{OE}{BM} = \frac{AO}{AM}$, отсюда $OE = \frac{AO \cdot BM}{AM}$ (2).
Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что $MC = BM$, можно сделать вывод, что $OF = OE$, ч.т.д.

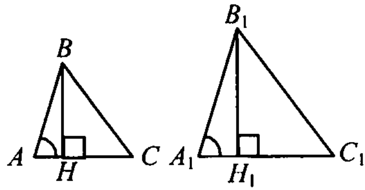
612. 1) В ΔADC и ΔAOK $\angle A$ – общий, $\angle K = \angle C = 90°$, значит $\Delta ADC \sim$
$\sim \Delta AOK$ по двум углам, т. е. $\frac{DC}{OK} = \frac{AC}{AK}$, отсюда $\frac{b}{x} = \frac{d}{m}$, ч.т.д.
2) В ΔABC и ΔKOC $\angle$C – общий, $\angle A = \angle K = 90°$, значит $\Delta ABC \sim$
$\sim \Delta KOC$ по двум углам, т. е. $\frac{AB}{KO} = \frac{AC}{KC}$, отсюда $\frac{a}{x} = \frac{d}{n}$, ч.т.д..
3) $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$, значит $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d} + \frac{d}{d} = 1$,
т. е. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, ч.т.д.



613. а) По условию в ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A_1C_1}$, значит
$\Delta ABM \sim \Delta A_1B_1M_1$ по трем сторонам и $\angle A = \angle A_1$. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,
$\angle A = \angle A_1$, значит $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, ч.т.д.

б) В ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$
$\angle A = \angle A_1$,
$\angle H = \angle H_1 = 90°$, значит
$\Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$ по
двум углам, т. е.

$$\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

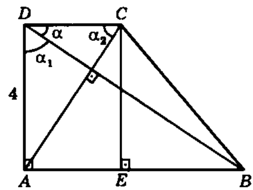


В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, значит

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, ч.т.д.

614. $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ см (по теореме Пифагора). $\angle D = 90°$. $\angle\alpha_1 = 90° - \angle\alpha$;
$\angle\alpha + \angle\alpha_2 = 90°$; $\angle\alpha_2 = 90° - \angle\alpha$,
значит, $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$. $\Delta ADC \sim \Delta BAD$
(по двум углам). Поэтому

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AD};\ DC = \frac{AD^2}{AB} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}\ \text{см.}$$

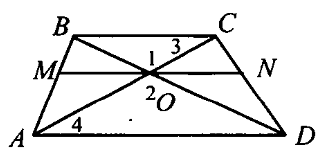


$CE \perp AB$; $CE = AD = 4$ см. $BE = AB - AE = AB - DC$;

$BE = 6 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ (см). $BC = \sqrt{CE^2 + BE^2} = \frac{2}{3}\sqrt{61}$ см.

615. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – трапеция;
$AC \cap BD = O$; $MN \parallel AD$;
$AD = a$; $BC = b$; $MN = ?$

<u>**Решение.**</u>



$\Delta AOD \sim \Delta COB$ по двум углам ($\angle 2 = \angle 1$ – вертикальные, $\angle 4 = \angle 3$ – накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC),

значит $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{a}{b}$.

2) $\Delta ABD \sim \Delta MBO$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle M = \angle A$ – соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AC), значит

$\dfrac{BD}{BO} = \dfrac{AD}{OM}$, отсюда $OM = \dfrac{AD \cdot BO}{BD} = \dfrac{a \cdot BO}{BD}$.

3) $\Delta BDC \sim \Delta ODN$ (по двум углам), следовательно

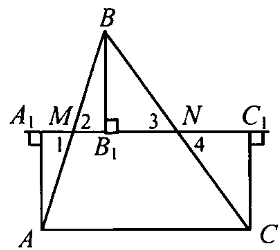
$$\frac{BC}{ON}=\frac{BD}{OD}=\frac{DC}{DC}, \text{ т. е. } OM=\frac{BC\cdot OD}{BD}=\frac{b\cdot OD}{BD}.$$

4) $MN = ON + MO = \dfrac{b\cdot OD}{BD}+\dfrac{a\cdot BO}{BD}=\dfrac{a\cdot OD+a\cdot BO}{BD}$;

$$BD = OB + OD = OB + \frac{a}{b}OB = OB\frac{b+a}{b};$$

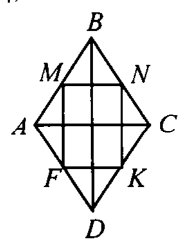
$$\frac{a\cdot BO+b\cdot\frac{a}{b}OB}{OB\cdot\frac{a+b}{b}}=\frac{OB(a+a)}{OB\cdot\frac{a+b}{b}}=\frac{2ab}{a+b}, \text{ ч.т.д.}$$

616. __**Дано:**__ ΔABC;
MN – средняя линия;
$AA_1 \perp MN$, $BB_1 \perp MN$, $CC_1 \perp MN$.
__**Доказать:**__ $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
__**Доказательство.**__



1) $\Delta AA_1M = \Delta BB_1$M по гипотенузе и острому углу ($AM = MB$, $\angle 1 = \angle 2$ – вертикальные), значит, т. е. $AA_1 = BB_1$ (1).
2) $\Delta BB_1N = \Delta CC_1N$ по гипотенузе и острому углу ($BN = NC$; $\angle 3 = \angle 4$ – вертикальные), значит, $AA_1 = BB_1$ (2).
3) Сравним (1) и (2), получим $AA_1 = BB_1 = CC_1$, ч.т.д.

617. __**Дано:**__ $ABCD$ – ромб;
M, N, K, F – середины сторон.
__**Доказать:**__ $MNKF$ – прямоугольник.
__**Доказательство.**__



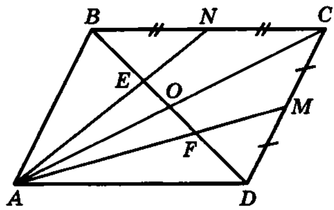
1) В ΔABD: FM – средняя линия, следовательно $BD \| FM$ и $FM - \dfrac{1}{2}BD$.

В ΔBCD: $NK \| BD$ и $NK = \dfrac{1}{2}BD$.

По признаку $FMNK$ параллелограмм.
2) $BD \| FM \| NK$, $DB \perp AC$ (по свойству диагоналей ромба),

значит $NK \perp AC$ и $FM \perp AC$;
$MN \| AC \| FK$, $FM \perp AC$, значит, $FM \perp MN$, $NK \perp AC$, $FK \perp FM$ и $NK \perp MN$, $NK \perp FK$, следовательно, $MNFK$ – прямоугольник, ч.т.д.

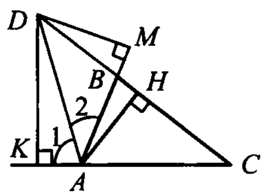
618. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. $BN = NC$ и $CM = MD$ (по условию). В ΔABC: AN и BO – медианы, тогда $BE : EO = 2 : 1$, $BE = \frac{2}{3}BO$, но $BO = OD$,



значит, $BE = \frac{1}{3}BD$. Рассматривая ΔACD, получаем $FD = \frac{1}{3}BD$.

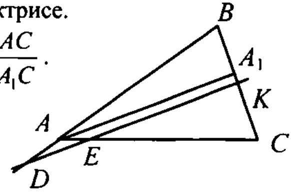
$EF = BD - (BE + FD) = \frac{1}{3}BD$. Таким образом, $BE = EF = FD$, ч.т.д.

619. 1) $AH \perp DC$ (AH – высота для ΔABD и для ΔAOC);
$S_{ABD} = \frac{1}{2}AH \cdot BD$; $S_{ACD} = \frac{1}{2}AH \cdot CD$, имеем: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$ (1).



2) $S_{ABD} = \frac{1}{2}DM \cdot AB$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}DK \cdot AC$, $DK = DM$;
$\Delta ADK = \Delta ADM$ по гипотенузе и острому углу (DA – общая, $\angle 1 = \angle 2$), следовательно $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$ (2).

3) Сравнивая (1) и (2), имеем по свойству пропорциональности $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD}$, ч.т.д.



620. DK – прямая, параллельная биссектрисе.

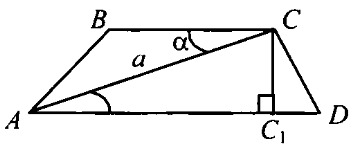
AA_1 – биссектриса, значит $\frac{AB}{BA_1}=\frac{AC}{A_1C}$.

$\Delta DBK \sim \Delta ABA_1$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle A=\angle D$), значит $\frac{DB}{BA}=\frac{BK}{BA_1}$, $BD=BK\cdot\frac{BA}{BA_1}$ (1).

$\Delta AA_1C \sim \Delta EKC$ по двум углам ($\angle C$ - общий, $\angle A=\angle C$), значит $\frac{AC}{KC}=\frac{AC}{EC}$; $EC=KC\cdot\frac{AC}{A_1C}$ (2).

Сравнивая (1) и (2), получим $BK=EC$; $\frac{BA}{BA_1}=\frac{AC}{A_1C}$, т. е.

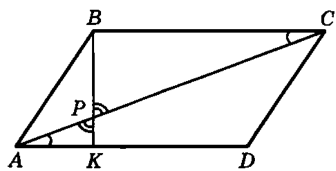
$BD=EC$, ч.т.д.



621. $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot CC_1$;

ΔCC_1A: $\angle C_1=90°$, $\angle A=\alpha$, $AC=a$, т.е. $CC_1=a\cdot\sin\alpha$; $BC+AD=b$, следовательно,

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}a\cdot b\sin\alpha$.



622. Рассмотрим ΔPBC и ΔAPK. Они подобны (по двум углам): $AK=\frac{1}{4}KD$ (по условию). $AK=\frac{1}{5}AD=\frac{1}{5}BC$; $\frac{BC}{AK}=5$.

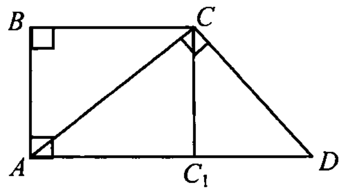
Рассмотрим ΔAPB и ΔAPK. Они имеют общую высоту (из вершины A), значит, $\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APK}}=\frac{BP}{PK}=5$ и $S_{\Delta APB}=5S_{\Delta APK}=5$ см^2.

Коэффициент подобия k ΔCPB и ΔAPK равен $\frac{BC}{AK}=5$; тогда:

$\dfrac{S_{\Delta CPB}}{S_{\Delta APK}} = 25$ и $S_{\Delta CPB} = 25$ см^2. Получаем:

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta APB} + S_{\Delta CPB} = 30$ см^2 и $S_{ABCD} = 2\cdot S_{\Delta ABC} = 30\cdot 2 = 60$ см^2.

623. По свойству высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, $\Delta CC_1D \sim \Delta AC_1C$.



Тогда $\dfrac{C_1D}{CC_1} = \dfrac{CC_1}{AC_1}$.

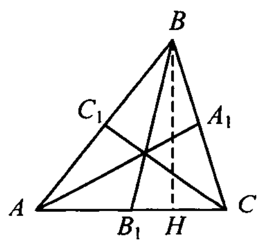
$C_1D = AD - AC_1 = 16 - 4 = 12$ см.

Имеем: $\dfrac{12}{CC_1} = \dfrac{CC_1}{4}$; $CC_1^{\,2} = 48$; $CC_1 = 4\sqrt{3}$.

Из ΔCC_1D $\operatorname{tg}\angle D = \dfrac{CC_1}{C_1D} = \dfrac{4\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, значит $\angle D = 30°$.

$\angle C = 180° - \angle D$ (внутренние односторонние при $BC \| AD$ и секущей AC). $\angle C = 150°$.

624. A_1, B_1, C_1 – середины сторон.



$S_{\Delta ABB_1} = \dfrac{1}{2} AB_1 \cdot BH$;

$S_{\Delta ABB_1} = \dfrac{1}{2} AB_1 \cdot BH$. $AB_1 = B_1C$,

значит $S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta BB_1C}$.

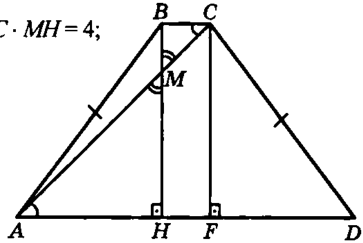
Аналогично $S_{\Delta ACC_1} = S_{\Delta BC_1C}$ и

$S_{\Delta BAA_1} = S_{\Delta CA_1A}$, ч.т.д.

625. Рассмотрим ΔAMH и ΔBMC. Они подобны по двум углам. Значит, $\dfrac{MH}{MB} = \dfrac{AH}{BC}$. $AD = 5BC$ (по условию). Проведем $CF \perp AD$.

$BC = HF$, тогда: $AH = \dfrac{AD - HF}{2} = \dfrac{5BC - BC}{2} = 2BC$; $\dfrac{AH}{BC} = 2$.

Отсюда получаем: $MH = 2MB$; $BH = \dfrac{3}{2} MH$. $S_{\Delta AMH} = 4$ см^2,



$S_{\Delta AMH} = \frac{1}{2} AH \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BC \cdot MH = 4;$

$BC \cdot MH = 4$ см^2. Имеем:

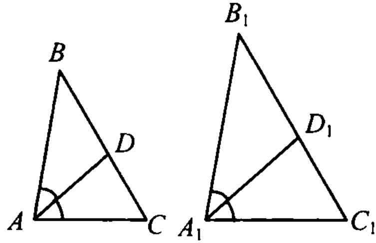
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH =$

$= \frac{1}{2}(5BC + BC) \cdot MH =$

$= 4BC \cdot MH = 4\frac{1}{2} \cdot 4 = 18$ см^2.

626. Пусть

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = k.$$



Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам (см. № 535).

Значит $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ и $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{B_1D_1}{D_1C_1}$. Отсюда $DC = \frac{AC \cdot BD}{AB}$ (1)

и $D_1C_1 = \frac{A_1C_1 \cdot B_1D_1}{A_1B_1}$ (2). Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{DC}{D_1C_1} = \frac{AC \cdot BD \cdot A_1B_1}{A_1C_1 \cdot B_1D_1 \cdot AB} = k \cdot k \cdot \frac{1}{k} = k.$$

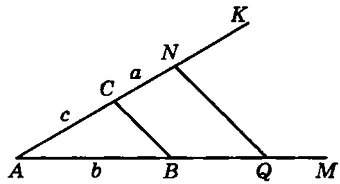
Итак, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{DC}{D_1C_1} = k$, значит $\Delta ADC \sim \Delta A_1D_1C_1$ по трем сторонам. Следовательно $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$, значит $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, ч.т.д.

627. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}$, значит

$k^2 = \frac{1}{2}; k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

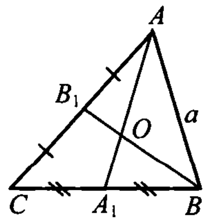
Используя свойство параллельных прямых, строим $\Delta A_1B_1C_1$, стороны которого в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ раз больше сторон ΔABC.

628. Построим угол $A < 180°$. На его сторонах отложим отрезки: на луче AK отрезок $AC = c$, $CN = a$; на луче AM отрезок $AB = b$. Соединим точки C и B. Получаем ΔABC. Через точку N проводим прямую, параллельную CB. Она пересекает луч AM в точке Q. По теореме Фалеса: $\frac{b}{c} = \frac{BQ}{a}$ (см. задачу 556); $BQ = \frac{ab}{c}$. BQ – искомый отрезок.



629. **Дано:** A, B, C – середины сторон некоторого $\Delta A_1B_1C_1$.
Построить: $\Delta A_1B_1C_1$.
1) Через точки A, B, C строим прямые $a \| BC$; $b \| AC$; $c \| AB$.
2) a, b, c попарно пересекутся в точках A_1; B_1; C_1. $\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

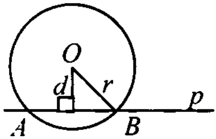
630. **Дано:** $AB = a$, $AA_1 = m_1$, $BB_1 = m_2$.
Построить: ΔABC.
Построение.
1) $AB = a$;
2) $AA_1 = m_1$, $O \in AA_1$ и $O \in BB_1$, медианы пересекаются и делятся этой точкой $AO : OA_1 = 2 : 1$, $BO : OE = 2 : 1$.
3) Строим окружность $\left(A; R_1 = \frac{2}{3}m_1\right)$ и окружность $\left(B; R_2 = \frac{2}{3}m_2\right)$. Они пересекутся в точке O.
4) Лучи AO и BO продлеваем на длину $AA_1 = m_1$ и $BB_1 = m_2$.
5) BA_1 и AB_1 пересекутся в точке C.
6) ΔABC – искомый.



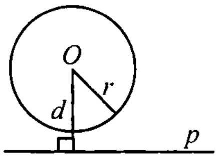
Глава VIII.
Окружность

§ 1 Касательная к окружности

631.



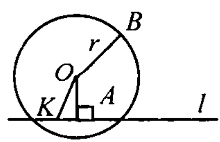
а), б), в) $r > d$, значит, прямая и окружность пересекаются в двух точках.



г) $r = 8$ см; $d = 1{,}2$ дм, т. е. $d = 12$ см и $r < d$, значит, прямая и окружность не пересекаются.

д) $r = 5$ см; $d = 50$ мм, т. е. $d = 5$ см и $r = d$, значит, прямая и окружность касаются.

632. <u>**Дано:**</u> окружность $(O; r)$; $OA = d$, $OB = r$; $d < r$, $A \in l$.



<u>**Доказать:**</u> l – секущая.

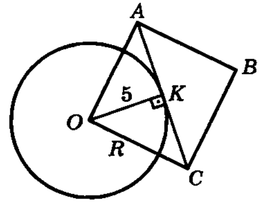
<u>**Доказательство.**</u>

1) Пусть $l \perp OA$, тогда $d < r$ и l – секущая (по определению).

2) Пусть l не $\perp OA$, тогда $OK \perp \Delta OAK$ – прямоугольный, т. к. OA – гипотенуза, то $OA > OK$;

$r > OA$, $r > OK$ (по условию), следовательно, l – секущая по определению, ч.т.д.

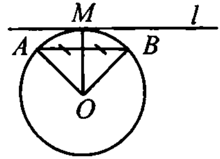
633. OA проходит через центр окружности, значит, OA – секущая. $OABC$ – квадрат со стороной 6 см, значит $AB = BC = 6$ см и находятся на расстоянии $OA = OC = 6$ см. Так как R равен 5 см и $6 > 5$, значит, AB и BC не являются секущими.



$$OK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OC^2} = 3\sqrt{2} \text{ см.}$$

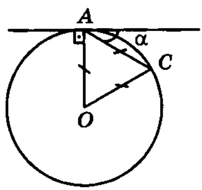
Очевидно, что $OK = 3\sqrt{2} < R$, поэтому AC – секущая.

634. **Дано:** Окружность (O; R)
AB – хорда;
$OM = R$, $AB \cap OM = E$;
$AE = EB$;
$M \in l$ – касательная. **Доказать:** $l || AB$.



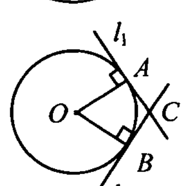
Доказательство.
1) В ΔAOB: $AO = OB = AB = R$, значит, $\angle A = \angle B = \angle O = 60°$.
2) По свойству касательных $OA \perp l$, значит,
$\angle\alpha = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.

635. AC – хорда, равная R, т. е. $AC = OC = AO$ (по условию). $\angle AOC = 60°$ (т. к. ΔAOC – равносторонний). Значит,
$\angle\alpha = 90° - 60° = 30°$.



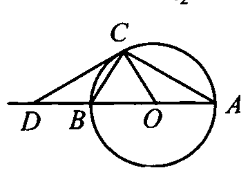
Ответ: 30°.

636. 1) $AB = OA = OB = R$, $\angle A = \angle B = \angle O = 60°$.
2) Из свойства касательных $OA \perp l_1$, $OB \perp l_2$, значит, $\angle CAB = \angle CBA = 90° - 60° = 30°$.
3) ΔABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$,
т. е. $\angle C = 180° - 60° = 120°$.



Ответ: 120°.

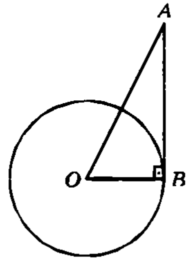
637. 1) $AO = OC = R$, следовательно, ΔAOC – равнобедренный, т. е. $\angle C = \angle A = 30°$;
2) $OC \perp CD$, следовательно,
$\angle ACD - \angle OCA + \angle DCO$;
$\angle ACD = 30° + 90° = 120°$;



3) ΔACD: $\angle D + \angle A + \angle C = 180°$,
$\angle D + 30° + 120° = 180°$, $\angle D = 30°$, т. е. $\angle A = \angle D = 30°$, следовательно, $AC = CD$ и ΔACD – равнобедренный. Ч.т.д.

638. По условию $\angle B = 90°$, т. е. треугольник OAB – прямоугольный. $AB^2 = OA^2 - OB^2$ (по теореме Пифагора).

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ см.}$$



__Ответ:__ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см.

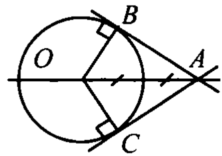
639. AB – касательная (по условию), следовательно, $OB \perp AB$;

из ΔAOB: $\operatorname{tg} \angle O = \frac{AB}{OB}$ отсюда:

$AB = OB \operatorname{tg} \angle O = 12 \cdot \operatorname{tg} 60° = 12\sqrt{3}$ см.

640. 1) В ΔAOB: $\angle B = 90°$, $OA = 9$, $OB = 4{,}5$,

т. е. $OB = \frac{1}{2} OA$.

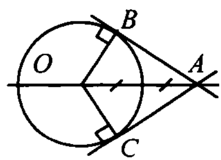


Имеем: $\angle OAB = 30°$.
2) Также, из ΔAOC $\angle OAC = 30°$.
3) $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = 30° + 30° = 60°$.

641. $OE = OC = OB = R$ $(OA = 2OE = 2R)$;

ΔAOB: $OB = \frac{1}{2} OA$, следовательно,

$\angle BAO = 30°$, а $\angle B = 90°$;
AO – биссектриса $\angle BAC$, значит,
$\angle BAC = 60°$.

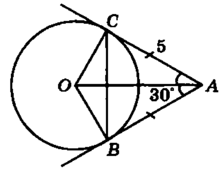


642. 1) В ΔAOB: $\angle B = 90°$, $AB^2 = OA^2 - OB^2$ (по т. Пифагора);
$AB^2 = 36 - 9 = 27$; $AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ см;

2) $\sin \angle 3 = \frac{OB}{AO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, значит, $\angle 3 = 30°$;

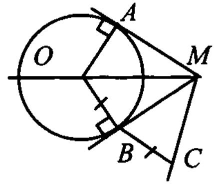
3) $\Delta AOB = \Delta AOC$, т. е. $AC = AB = 3\sqrt{3}$ см; $\angle 4 = \angle 3 = 30°$.

643. $AC = AB$; $\angle OAB = \angle CAO = 30°$. Значит, $\angle CAB = 60°$ и ΔABC – равносторонний. Отсюда $BC = CA = AB = 5$ см.



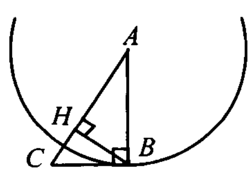
Ответ: 5 см.

644. 1) В ΔOMB и ΔCMB: MB – общая, $OB = BC$, значит $\Delta CMB = \Delta OMB$ (по двум катетам), т. е. $\angle OMB = \angle CMB$;
2) $\angle BMO = \angle AMO$ (свойство параллельных отрезков);
3) $\angle AMC = \angle AMO + \angle BMC + \angle OMB$, $\angle AMC = 3 \cdot \angle BMC$, т. к. $\angle OMB = \angle BMC = \angle AMO$, ч.т.д.



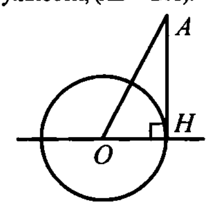
645. **Дано:** Окр (O; R); $AB = 2R$;
$C \in l$ – касательная; $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$.
Доказать: $A_1C = CB_1$.
Доказательство.
1) $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$, значит, $BB_1 \parallel AA_1$, т. е. $ABCD$ – прямоугольная трапеция.
2) Т. к. $OC \perp l$, то $OC \parallel AA_1 \parallel BB_1$, $OA = BO$, $O \in AB$, т. е. по т. Фалеса OC – средняя линия трапеции и $A_1C = CB_1$, ч.т.д.

646. Из условия $CB \perp AB$; $AB = R$ Окр (A; AB), значит по признаку CB – касательная к Окр (A; AB).
Из условия $CB \perp AB$, $CB = r$ Окр (C; CB), значит по признаку AB – касательная к Окр (C; BC).
Пусть Окр (B; BC), тогда AC секущая к этой окружности, ($BC > BH$).



Пусть Окр (B; AB), тогда AC секущая к этой окружности, ($AB > BH$).

647. **а)** $OA = 5$ см, $AH = 4$ см.
В ΔAHO: $OA = 5$, $AH = 4$, $OH = 3$, по т. Пифагора $5^2 = 4^2 + 3^2$; $25 = 25$, следовательно, ΔAHO – прямоугольный, т. е. $\angle OHA = 90°$ и AH является касательной;
б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см.



В ΔAHO: $OH = 3$, $OA = 4$, $\angle HAO = 45°$.

Допустим: $\angle H = 90°$, тогда $AH = OH = 3$,

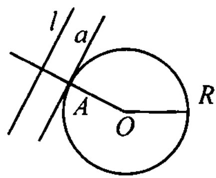
т. е. $AO = 3\sqrt{2}$, а это противоречит условию $AO = 4$, следовательно, предположение неверно и AH не является касательной.

в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см.

В ΔAHO: $OA = 6$, $OH = 3$, $\angle A = 30°$;

$OH = \frac{1}{2}OA$, значит, $\angle H = 90°$, т. е. AH является касательной.

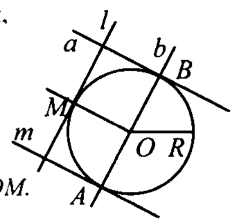
648. а) Построить касательную к окружности, параллельную l.



Построение:

1) Строим $OM \perp l$.
2) $OM \cap$Окр $(O; R) = A$.
3) Через точку A проведем прямую $a \parallel l$.
4) a – искомая касательная.

б) Построить касательную к окружности, перпендикулярную l.

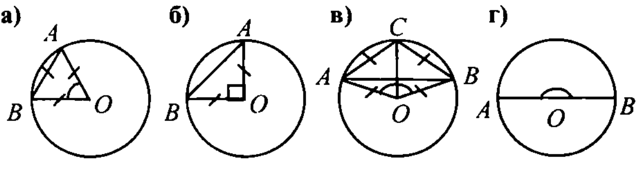


Построение:

1) Строим $OM \perp l$.
2) Через точку O проводим прямую $b \parallel l$.
3) $b \cap$Окр$(O; R) = \{A; B\}$.
4) Через A или B проводим прямую $a \parallel OM$.
3) $b \cap$Окр$(O; R) = \{A; B\}$
4) Через A или B проводим прямую $a \parallel OM$.
5) a или a_1 – является искомой касательной.

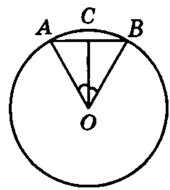
§ 2 Центральные и вписанные углы

649. а) **б)** **в)** **г)**



650. ΔAOB – равнобедренный (если $\angle AOB \neq 180°$).

$AB = 2OA \cdot \sin\frac{\angle AOB}{2} = 32\sin\frac{\angle AOB}{2}$.



а) $AB = 32\sin\frac{60°}{2} = 16$;

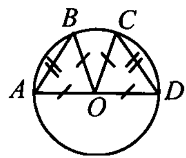
б) $AB = 32\sin\frac{90°}{2} = 16\sqrt{2}$;

в) $AB = 2r = 32$.

651. **а)** **<u>Дано:</u>** Окр $(O; R)$; $AB = CD$.

<u>Доказать:</u> $\frown AB = \frown CD$.

<u>Доказательство.</u>



В ΔAOB и ΔCOD: $OC = OA = R$, $OD = OB = R$, из условия: $AB = CD$, т. е. $\Delta AOB = \Delta COD$ (по трем сторонам), значит

$\angle AOB = \angle COD$, $AB = CD$.

б) **<u>Дано:</u>** Окр $(O; R)$;

$AB = CD$;

$\frown CD$ и $\frown CBD = ?$

<u>Решение:</u>

1) $AB = CD$ (см. **а)**)

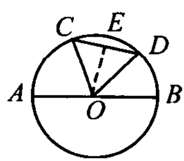
$\angle AOB = 112°$, значит,

$AB = 112°$ и $CD = 112°$.

2) Т. е. $\angle CBD = 360° - 112° = 248°$.

652. 1) $CD = 180° - (AC + DB) = 180° - 60° = 120°$;

2) из ΔCOD: $\angle O = 120°$, $OD = OC = 15$ см,



т. к. $OE \perp CD$, $\sin\angle EOD = \frac{ED}{OD}$; отсюда

$ED = OD \cdot \sin\angle EOD = 15 \cdot \sin\angle 60° =$

$= 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $CD = 2ED = 15\sqrt{3}$ см.

653. Вписанный угол ABC равен половине дуги AC, на которую он опирается.

а) $\angle ABC = 48° : 2 = 24°$; **б)** $\angle ABC = 57° : 2 = 28°30'$;

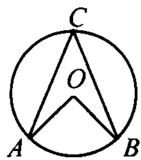
в) $\angle ABC = 90° : 2 = 45°$; **г)** $\angle ABC = 124° : 2 = 62°$;

д) $\angle ABC = 180° : 2 = 90°$.

654. а) $\angle x = \frac{1}{2}(360° - 80° - 152°) = 64°$; **б)** $x = 360° - (60° + 125°) = 175°$;

в) $\angle x = (180° - 112°) : 2 = 34°$; **г)** $x = 360° - (215° + 40°) = 105°$.

655. **<u>Дано:</u>** $\angle ABC > \angle ACB$ на 30°; AOB, ACB = ?



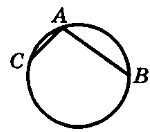
<u>Решение:</u>

Пусть $\angle ACB = x$, тогда $\angle AOB = x + 30°$;

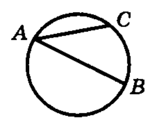
$\angle AOB = AB$, следовательно, $\angle AOB = \frac{1}{2} AB$;

$x = \frac{1}{2}(x + 30°) = 30°$, значит, $\angle ACB = 30°$, $\angle AOB = 60°$.

656. Возможны два варианта.



1) точка C лежит на дуге AB большей полуокружности. $\angle BAC = \dfrac{360° - 115° - 43°}{2} = 101°$;

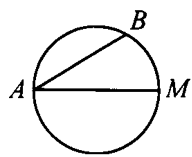


2) точка C лежит на дуге AB меньшей полуокружности. $\angle BAC = \dfrac{115° - 43°}{2} = 36°$.

<u>Ответ:</u> 101°; 36°.

657. **<u>Дано:</u>** AB = 140°; $M \in AB$, $AM : MB$ = 6 : 5; $\angle BAM$ = ?

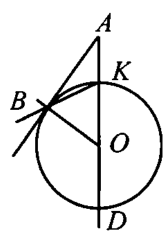
<u>Решение.</u>



1) AMB = 360°; где BA = 360° – 140° = 220°;
$AM : MB$ = 6 : 5, значит $AM = 6x$, $AM + MB$ = 20°;
$MB = 5x$; $6x + 5x = 220$; $x = 20$,
т. е. $AM = 20 \cdot 6 = 120°$, $MB = 20 \cdot 5 = 100°$;

2) $\angle BAM = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$.

658. **<u>Дано:</u>** AB – касательная; AD – секущая;
$D \in$ Окр (O; R); BD = 110°20'; $\angle BAD$, $\angle ADB$ = ?



<u>Решение.</u>

1) Т. к. $\angle BKD$ – вписанный, то

$\angle BKD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2}\, 110°20' = 55°10'$.

2) Имеем $\angle DBK = \dfrac{1}{2} DK = 90°$, следовательно

$\angle DBA = 90° - \angle BKD$; $\angle BDA = 89°60' - 55°10' = 34°50'$;

3) $OB = OD = R$, значит ΔBOD – равнобедренный, т. е.

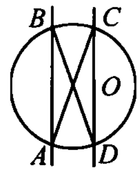
$\angle DBO = \angle BDO = 34°50'$, значит,

$\angle DBA = \angle DBO + \angle OBA = 34°50' + 90° = 124°50'$, значит,

$\angle BAD = 180° - (124°50' + 34°50') = 179°60' - 159°40' = 20°20'$.

<u>Ответ:</u> $34°50'$, $20°20'$.

659. **<u>Дано:</u>** $AB \| CD$. **<u>Доказать:</u>** $AD = BC$.



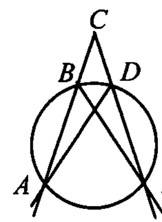
<u>Доказательство.</u>

1) $\angle BAC$ и $\angle ACD$ – накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC, т. е. $\angle BAC = \angle ACD$;

2) т. к. $\angle ACD = \dfrac{1}{2} AD$ и $\angle BAC = \dfrac{1}{2} CB$, то

$CB = AD$, ч.т.д.

660. **<u>Дано:</u>** AC, AE – секущие; $\angle ACE = 32°$; $AE = 100°$; $BD = ?$



<u>Решение.</u>

1) $\angle ABE$ – вписанный, следовательно,

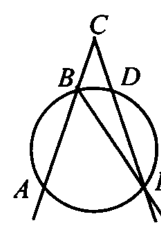
$\angle ABE = \dfrac{1}{2} AE = \dfrac{1}{2} 100° = 50°$;

2) т. к. $\angle EBC$ и $\angle ABE$ смежные, то

$\angle BED = 180°(130° + 32°) = 18°$, следовательно, $BD = 2 \cdot \angle BED = 2 \cdot 18° = 36°$.

<u>Ответ:</u> 36°.

661. **<u>Дано:</u>** AC, FC – секущие; $AF = 140°$, $BD = 52°$; $\angle ACF = ?$



<u>Решение.</u>

1) Т. к. $\angle ABF$ – вписанный, то

$\angle ABF = \dfrac{1}{2} AF = 70°$.

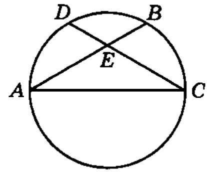
2) Т. к. $\angle BFD$ – вписанный, то

$\angle BFD = \dfrac{1}{2} BD = 26°$.

3) Из $ABCF$: $\angle F = 26°$,

$\angle B$ (смежный с $\angle ABF$) $= 180° - 70° = 110°$;

$\angle C = 180° - (26° + 110°) = 44°$.

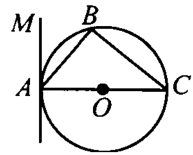


662. $\angle A = \dfrac{\cup BC}{2} = \dfrac{70^\circ}{2} = 35^\circ$;

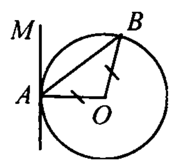
$\angle C = \dfrac{\cup AD}{2} = \dfrac{54^\circ}{2} = 27^\circ$.

$\angle BEC = \angle A + \angle C$ (как внешний ΔAEC),
т. е. $\angle BEC = 35^\circ + 27^\circ = 62^\circ$.

Ответ: 62°.

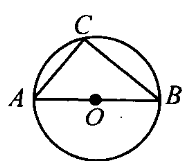


663. 1) $\angle B = \dfrac{1}{2} AC = 90^\circ$, следовательно,
ΔABC – прямоугольный,
$\angle C = 90^\circ - \angle BAC$ (1).
2) AM – касательная к окружности, значит, $AM \perp AC$ и $\angle MAB = 90^\circ - \angle BAC$ (2).
3) Сравнивая (1) и (2), имеем: $\angle C = \angle MAB$, ч.т.д.



664. Т. к. $AO = BO = R$, ΔAOB – равнобедренный, следовательно, $\angle B = \angle A = \alpha$, т. е.
$\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ (1),
$\angle AOB$ – центральный, значит, $\angle AOB = AB$.
Т. к. AM – касательная, $AM \perp AO$, т. е.
$\angle MAB = 90^\circ - \alpha$.

Сравнивая (1) и (2), имеем: $\angle MAB = \dfrac{1}{2} \angle AOB = \dfrac{1}{2} AB$, ч.т.д.



665. 1) Т. к. $\angle ACB$ – вписанный, то $\angle ACB =$
$= \dfrac{1}{2} AB = \dfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, следовательно
ΔABC – прямоугольный, т. е. $\angle C > \angle B$,
$\angle C > \angle A$.
$\angle A + \angle B = 90^\circ$ (по свойству углов прямоугольного треугольника), следовательно, каждый из углов меньше $\angle C$.

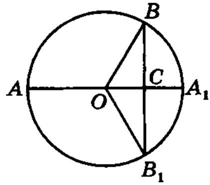
666. $AE \cdot BE = CE \cdot ED$ (по теореме о пересекающихся хордах) и

$ED = \dfrac{AE \cdot BE}{CE}$.

а) $ED = \dfrac{2\cdot 5}{2{,}5} = 4$;   **б)** $ED = \dfrac{16\cdot 9}{ED}$; $ED^2 = 144$; $ED = 12$;

в) $ED = \dfrac{0{,}2\cdot 0{,}5}{0{,}4} = 0{,}25$.

667. В ΔOBB_1: $OB = OB_1 = R$, значит, ΔOBB_1 – равнобедренный. OC – высота и медиана ΔOBB_1.



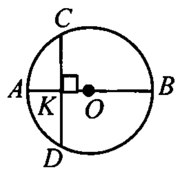
Значит, $BC = CB_1 = BB_1$. Тогда получаем:

$AC \cdot CA_1 = BC \cdot CB_1 = \dfrac{BB_1}{4}$ (по теореме о пересекающихся хордах).

$BB_1 = 2\sqrt{AC\cdot CA_1} = 2\sqrt{4\cdot 8} = 8\sqrt{2}$ (см).

668. **<u>Дано:</u>** AB – диаметр, $CD \perp AB$, $CD \cap AB = K$.

<u>Доказать:</u> $CK = \sqrt{AK\cdot KB}$.



<u>Доказательство:</u>

1) $CD \perp AB$, следовательно, $CK = KD$ (см. 667).

2) По свойству хорд: $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, т.к. $CK = KD$, то $AK \cdot KB = CK^2$;

$CK = \sqrt{AK\cdot KB}$, ч.т.д.

669. **<u>Построить:</u>** AB : $AB = \sqrt{a\cdot b}$.

<u>Построение:</u>

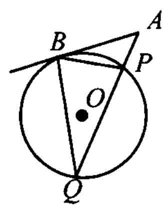
1) проводим прямую l, на ней откладываем два отрезка $KN = a$, $NM = b$;

2) строим окружность с центром на l и диаметром KM;

3) проводим прямую, перпендикулярную l, через точку N;

4) перпендикуляр пересекает окружность в точках A и B, имеем: AB – искомый отрезок.

670. $\Delta ABP \sim \Delta AQB$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle Q = \angle B$) значит $\dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AP}{AB}$.

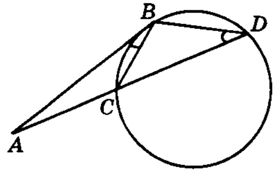


По свойству пропорции $AB^2 = AQ \cdot AP$, ч.т.д.

671. $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ ($\angle A$ – общий;

$\angle B = \angle D = \frac{1}{2}\smile BC$). Поэтому

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$; $AB^2 = AD \cdot AC$.



а) $CD = AD - AC$;

$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4^2}{2} = 8$ (см); $CD = 8 - 2 = 6$ (см).

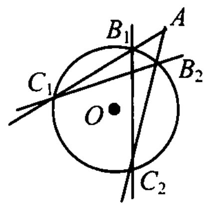
б) $CD = AD - AC$; $AC = \frac{AB^2}{AD} = \frac{5^2}{10} = 2{,}5$ (см);

$CD = 10 - 2{,}5 = 7{,}5$ (см).

672. В $\Delta AC_1B_2 \sim \Delta AC_2B_1$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle C_2 = \angle C_1 = \frac{1}{2}B_1B_2$, значит

$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$. Из свойства пропорции

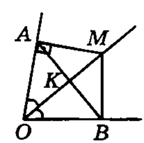
$AC_1 \cdot AB_1 = AB_2 \cdot AC_2$, ч.т.д.



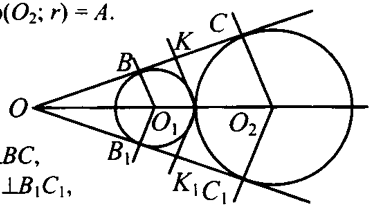
673. Решение приведено в учебнике.

§ 3 Четыре замечательные точки треугольника

674. Рассмотрим ΔOAM и ΔOBM: $\angle 1 = \angle 2$, т. к. OM – биссектриса, OM – гипотенуза – общая сторона. $\Delta OAM = \Delta OBM$. Поэтому $OA = OB$. Точка K лежит на прямой OM. Это точка пересечения с прямой AB. OK – биссектриса ΔOAB, а т. к. ΔOAB – равнобедренный, значит, OK – высота ΔOAB. Отсюда $OM \perp AB$, что и требовалось доказать.



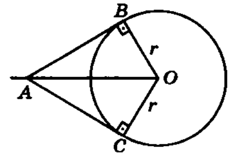
675. **Дано:** $\angle O$; Окр(O_1; R)$\cap$Окр(O_2; r) = A.
Доказать: O_1; $O_2 \in OA$.
Доказательство.
1) BC и B_1C_1 – касательные к окружностям, значит, $O_1B \perp BC$, $O_2C \perp BC$ и $O_2C_1 \perp B_1C_1$, $O_1B_1 \perp B_1C_1$,



т.е. точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle O$ (по свойству биссектрисы).

2) Т. к. $AK = AK_1$ (по свойству биссектрисы), то A лежит на биссектрисе.

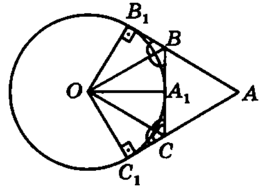
676. $OB = OC = r$. OA – биссектриса $\angle A$.



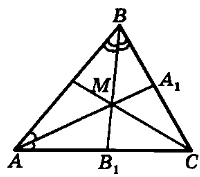
а) $OA = \dfrac{r}{\sin 30^\circ} = 10$ см.

б) $r = OA \cdot \sin 45^\circ = 7\sqrt{2}$ дм.

677. Проведем $OB_1 \perp AB$; $OA_1 \perp BC$ и $OC_1 \perp AC$. По условию OB и OC – биссектрисы внешних углов, значит, точка O лежит на прямых OB и OC и равноудалена от прямых AC, BC и AB, т. е. $OA_1 = OC_1 = OB_1$. Значит, окружность радиуса OA_1 проходит через точки B_1 и C_1, а т. к. $OB_1 \perp BA$; $OA_1 \perp BC$ и $OC_1 \perp AC$, то точка O является центром окружности, касающейся прямых AB, BC и AC, что и требовалось доказать.



678. Проведем прямую CM, которая будет биссектрисой $\angle C$. $\angle ACM = \angle BCM$. Очевидно, $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.

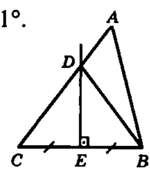


$$\angle ACM = \frac{\angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A - \angle B}{2} =$$

$= 90^\circ - (180^\circ - \angle AMB) = \angle AMB - 90^\circ$;

а) $\angle ACM = \angle BCM = 46^\circ$; **б)** $\angle ACM = \angle BCM = 21^\circ$.

679. Из условия $BD = CD$.

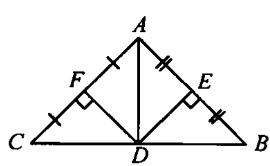


а) $CD = BD = 5$ см; $AD = AC - CD = 3{,}5$ см;

б) $AC = AD + CD = AD + BD = 14{,}6$ см.

680. **а)** 1) $DE \perp AB$, $AE = EB$, следовательно, $BD = AD$, по свойству серединного перпендикуляра;

2) $FD \perp AC$, $CF = FA$, следовательно, $CD = DA$, по свойству серединного перпендикуляра.

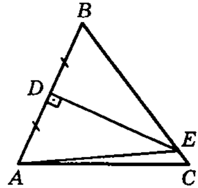


3) Имеем: $AD = BD$, $CD = DA$, т. е. $CD = DB$, значит D – середина CB, ч.т.д.

б) $\angle A = \angle CAD + \angle DAB$;

ΔACD – равнобедренный, значит, $\angle CAD = \angle C$; ΔADB – равнобедренный, значит, $\angle DAC = \angle B$, т. е. $\angle A = \angle B + \angle C$, ч.т.д.

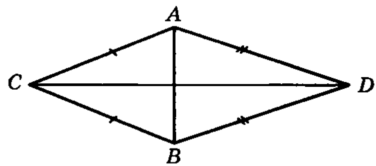
681. По условию, ΔABC – равнобедренный, т. е. $AB = BC = 18$ см. ΔABE – равнобедренный (т. к. точка E лежит на серединном перпендикуляре). Поэтому $AE = BE$.



Из ΔAEC выразим AC: $AC = P_{\Delta AEC} -$
$- (AE + EC) = P_{\Delta AEC} - (BE + EC) =$
$= P_{\Delta AEC} - BC = 27 - 18 = 9$ см.

Ответ: 9 см.

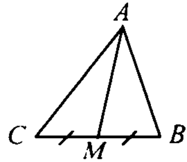
682. По условию ΔABC – равнобедренный, а значит, точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. AB – общее основание для треугольников, значит, точка D тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Отсюда CD – серединный перпендикуляр, который проходит через середину отрезка AB, ч.т.д.



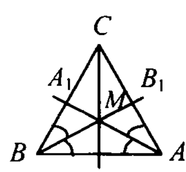
683. 1) Допустим, что $AM \perp BC$.

2) $\Delta AMC = \Delta AMB$ по двум катетам (AM – общая, $CM = MB$), значит, $AC = AB$, но это противоречит условию $AB \neq AC$.

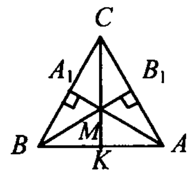
3) Следовательно, наше предположение неверно, и AM не перпендикулярна BC, ч.т.д.



684. $AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно, CM – биссектриса $\angle C$, опущенная на основание равнобедренного треугольника, т. е. $CM \perp AB$, ч.т.д.

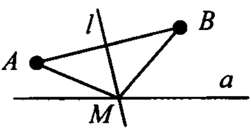


685. 1) $AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно по замечательному свойству треугольника: $CM \perp AB$.
2) $\Delta BCK = \Delta ACK$ по катету и гипотенузе (CK – общая, $BC = AC$), значит, $KA = BK$, ч.т.д.

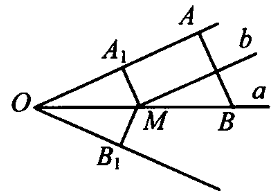


686. Решение приведено в учебнике.

687. 1) Строим отрезок AB.
2) Строим $l \perp AB$, где l – серединный перпендикуляр к отрезку AB.
3) l пересекает a в точке M.
4) M – искомая точка.



688. <u>**Дано:**</u> $\angle\alpha$, AB.
<u>**Построить:**</u> M, такую, что $MA_1 \perp OA_1$; $MB_1 \perp OB_1$ и $AM = MB$.
<u>**Построение:**</u>
Строим биссектрису $\angle O$.
Строим серединный перпендикуляр к AB.
$a \cap b = M$. M – искомая точка.

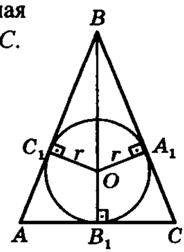


§ 4 Вписанная и описанная окружности

689. Точки A_1, B_1 и C_1 – точки, в которых вписанная окружность радиусом r касается сторон ΔABC. $OC_1 = OA_1$; BO – биссектриса $\angle B$, которая является серединным перпендикуляром равнобедренного ΔABC. $OB_1 \perp AC$, значит, $AB_1 = B_1C = 5$ см.

$BB_1 = \sqrt{BC^2 - B_1C^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см) –

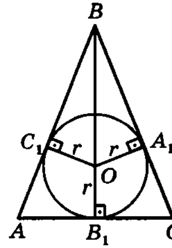
по теореме Пифагора. Рассмотрим ΔBOA_1 и ΔBB_1C. Они подобны, как прямоугольные треугольники с одним общим углом B. Тогда: $\frac{r}{5} = \frac{12 - r}{13}$; $r = 3\frac{1}{3}$ см.



690. $BO : OB_1 = 12 : 5$. A_1, C_1, B_1 – точки касания вписанной окружности, $OB_1 = r = 5x$. Имеем: $BB_1 = BO + OB_1 = 12x + 5x = 17x$.
$\Delta BOA_1 \sim \Delta BB_1C$ (задача 689):

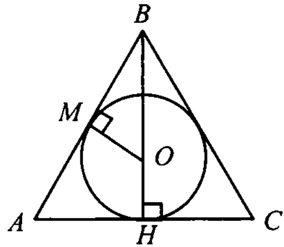
$$\frac{OB_1}{AC/2} = \frac{OB}{BC};\ \frac{AC}{2} = \frac{OB_1 \cdot BC}{OB};\ \frac{AC}{2} = \frac{5x \cdot 60}{12x};\ \frac{AC}{2} =$$

$= 25$; $AC = 50$ см.



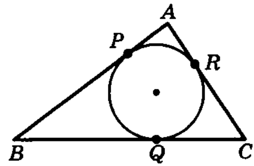
Ответ: 50 см.

691. **Дано:** ΔABC;
$BE = 2$ см, $AE = 3$ см;
$AB = BC$. Найти: $P_{ABC} = ?$



Решение.
1) $AE = AK$ (свойство касательных отрезков), значит, $AK = 3$ см и $AC = 6$ см;
2) $AB = AE + EB = 3 + 4 = 7$см;
3) $P_{ABC} = 7 + 7 + 6 = 20$ см.

692. $BP = BQ$; $AP = AR$; $CR = CQ$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки). Имеем равенства:



$$\begin{cases} AB = AP + BP = 10 \text{ см} \\ AC = AR + RC = 5 \text{ см} \\ BC = BQ + QC = 12 \text{ см} \end{cases}.$$

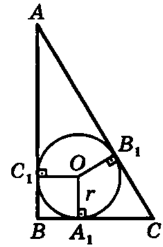
Получим систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} AP + BP = 10 \text{ см} \\ AR + RC = 5 \text{ см} \\ BQ + QC = 12 \text{ см} \end{cases}.$$

Вычтем из третьего уравнения второе и получим: $BP - AP = 7$ см.
Сложим это с первым равенством: $2BP = 17$ см. $BP = 8{,}5$ см.
Получили: $BP = BQ = 8{,}5$ см.
Аналогично находим $AP = AR = 1{,}5$ см; $QC = CR = 3{,}5$ см.

Ответ: $AP = AR = 1{,}5$ см;
$BP = BQ = 8{,}5$ см; $QC = CR = 3{,}5$ см.

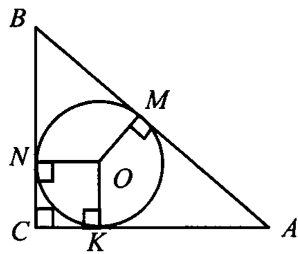
693. Точки A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности радиуса r с прямыми BC, AC и AB. O – центр окружности. $OC_1 \perp AB$; $OB_1 \perp AC$ и $OA_1 \perp BC$; $OC_1 = OB_1 = OA_1 = r$. Значит, C_1OA_1B – квадрат, сторона которого равна r.



а) $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + AB_1 + B_1C$.
$P_{\Delta ABC} = AC_1 + r + r + A_1C + AB_1 + B_1C = 2r + 2AC = 60$ см.

б) $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 2r + 2AC$. Учтем, что: $A_1C = CB_1 = 5$ см; $BC_1 = r$, $AC_1 = AB_1 = 12$ см. Тогда по теореме Пифагора имеем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ или $(5 + 12)^2 = (r + 12)^2 + (r + 5)^2$. Преобразуем это уравнение к виду: $2r^2 + 34r = 120$ или $r^2 + 17r - 60 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение: $D = 289 + 240 = 23^2$. Находим корни уравнения. $r_1 = \dfrac{-17+23}{2} = 3$ см, $r_2 = \dfrac{-17-23}{2} = -20$ – не подходит по смыслу. $P_{\Delta ABC} = 2r + 2AC = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 17 = 40$ см.

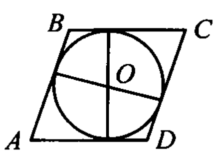
694. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $\angle C = 90°$; $AB = c$; $AC + CB = m$; $d = ?$



<u>**Решение.**</u>
По свойству касательных отрезков:
$NB = MB$, $KC = CN$, $AM = AK$.
Пусть $AK = AM = x$, тогда $BN = MB = c - x$ и, т. к. $AC + CB = m$, то
$(x + r) + (c - x) + r = m$,
$2r = m - c$, $d = m - c$.

695. В четырехугольнике, описанном около окружности, суммы противоположных сторон равны. Поэтому: $P = 15 \cdot 2 = 30$ см.

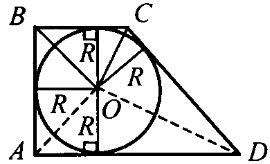
696. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм; Окр (O; R) – вписана. <u>**Доказать:**</u> $ABCD$ – ромб.



<u>**Доказательство.**</u>
$ABCD$ – описанный около Окр (O; R), следовательно, $AB + CD = AD + BC$.
Мы знаем, что стороны в параллелограмме попарно равны. Поэтому запишем: $2AB = 2AD$, т. е. $AB = AD$ (соседние сторо-

ны равны), следовательно, $ABCD$ – ромб, ч.т.д.

697. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – описанный четырехугольник.



<u>**Доказать:**</u> $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$.

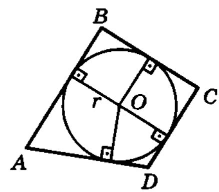
<u>**Доказательство.**</u>

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{ABO}$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot R + \frac{1}{2} CD \cdot R + \frac{1}{2} AD \cdot R +$

$+ \frac{1}{2} AB \cdot R = \frac{1}{2} R\,(AB + BC + CD + AD) = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$, ч.т.д.

698. $P = 12 \cdot 2 = 24$ см – задача 695. Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, полученных в результате соединения вершин четырехугольника с центром O вписанной окружности. Тогда площадь каждого треугольника равна произведению половины основания на высоту, где основание – одна из сторон четырехугольника, высота равна радиусу. Таким образом, $S = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{24}{2} \cdot 5 = 60$ см^2.



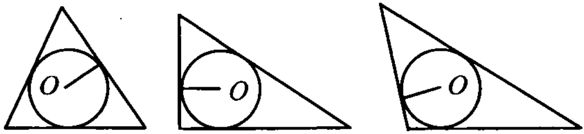
699. $P = 2 \cdot 10 = 20$ см – задача 695.

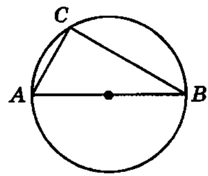
$S = P \cdot r$ задача 698, тогда $r = \dfrac{S}{P/2} = 1{,}2$ см.

700. Диагонали ромба делят его на 4 равных прямоугольных треугольника (т. к. в точке пересечения диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся пополам). Значит, если провести высоты из прямых углов этих треугольников, то они тоже будут равны.

Проведем окружность с центром в точке пересечения диагоналей ромба и проходящей через основание одной из высот прямого угла. Эта окружность пройдет и через основания трех других высот. Стороны ромба перпендикулярны высотам прямых углов, которые являются радиусами вписанной окружности.

701.

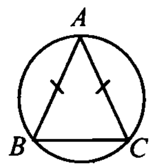




702. $\angle C$ опирается на диаметр, значит,
$\angle C = 90°$.

а) $\angle A = \dfrac{\cup BC}{2} = 67°$; $\angle B = 90° - 67° = 23°$.

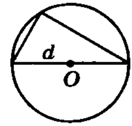
б) $\angle B = \dfrac{\cup AC}{2} = 35°$; $\angle A = 90° - 35° = 55°$.



703. __Дано:__ ΔABC – вписанный; $AB = AC$,
$BC = 102°$; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ = ?

__Решение.__

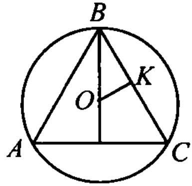
$\angle A = \dfrac{1}{2} BC = 51°$; $AB = AC$, следовательно,
$\angle B = \angle C = (180° - 51°) : 2 = 64°30'$.



704. **а)** Вписанный прямой угол опирается на полуокружность.
Значит, в треугольнике гипотенуза будет и диаметром окружности.
А точка O – середина диаметра, а значит и гипотенузы, что и требовалось доказать.
б) d – гипотенуза треугольника (из условия).
Его катеты равны $d \cdot \sin \alpha$ и $d \cdot \cos \alpha$.

705. R = гипотенузы (задача 704). $R = AB$.

а) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$ см; $R = 5$ см.
б) $AB = 2AC = 36$ см; $R = 18$ см.



706. __Дано:__ ΔABC – вписанный:
$AB = BC = AC$; $OB = 10$ см; AB = ?

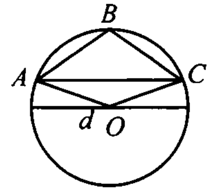
__Решение.__

1) ΔABC – равносторонний, значит
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$;
2) В ΔBKO: $\angle K = 90°$, $\angle B = 30°$, $OB = 10°$,

значит, $BK = OB \cdot \cos 30° = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$;

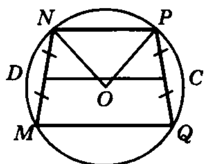
3) $BC = 2BK = 10\sqrt{3}$.

707. <u>**Дано:**</u> ΔABC – вписанный;
$AB = BC = 8$, $\angle B = 120°$; $d = ?$



<u>**Решение.**</u>
1) ΔABC – равнобедренный, значит,
$\angle C = \angle A = (180° - 120°) : 2 = 30°$;
2) $\angle C = \dfrac{1}{2} AB$, т. е. $AB = 60°$, $\angle A = \dfrac{1}{2} BC$,
т. е. $BC = 60°$, значит, $\angle ABC = 120°$ и $\angle AOC = 120°$;
3) $ABCO$ – параллелограмм (т. к. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle O$), т. е. $AB = OC$, $BC = AO$ (по свойству); $AB = BC = 8$, $OC = OA = 8$ см;
4) $d = 2r = 2 \cdot 8 = 16$ см.

708. **а)** В прямоугольнике диагонали равны. В точке пересечения они делятся пополам. Поэтому окружность с центром в точке пересечения диагоналей, проходя через одну из вершин прямоугольника, будет проходить и через остальные три вершины. А такая окружность и есть описанная около прямоугольника.



б) $MNPQ$ – трапеция: $MQ \parallel NP$, $MN = PQ$; $\angle M = \angle Q$ (по условию). OD и OC – серединные перпендикуляры к сторонам MN и PQ, точка O – точка их пересечения. $ND = DM$; $PC = CQ$. Значит, $MQ \parallel CD$. $\angle MDC = \angle DCQ$, отсюда $\angle ODC = \angle DCO$, т. е. ΔDOC – равнобедренный: $DO = OC$.
Рассмотрим ΔODN и ΔOCP: $\angle D = \angle C = 90°$, $DO = OC$; $DN = PC$, значит, $\Delta ODN = \Delta OCP$ и $NO = OP$.
Поэтому окружность с центром в точке O, проходящая через одну из вершин трапеции, проходит и через его другие вершины. Такая окружность является описанной около трапеции.

709. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – параллелограмм вписанный.
<u>**Доказать:**</u> $ABCD$ – прямоугольник.
<u>**Доказательство.**</u>
$ABCD$ – вписанный, значит, $\angle C + \angle A = 180°$; $\angle D + \angle B = 180°$, но по свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle A$ и $\angle B = \angle D$, т. е. $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$, значит $ABCD$ – прямоугольник (по определению), ч.т.д.

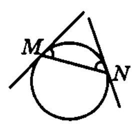
710. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – трапеция вписанная.
<u>**Доказать:**</u> $AB = CD$.

Доказательство.

1) $ABCD$ – вписанная трапеция, следовательно,
$\angle B + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle A = 180°$ (1);
Также: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$(2);
по свойству углов при $AD \| BC$.
2) Сравнивая (1) и (2), получим
$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle A + \angle B = 180°$, т. е. $\angle B = \angle C$;
$\angle B + \angle D = 180°$, $\angle A + \angle B = 180°$, т. е. $\angle A = \angle D$.
Имеем: углы при верхнем и нижнем основаниях попарно равны, следовательно, $ABCD$ – равнобедренная.

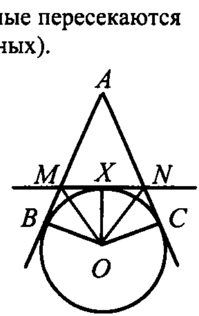
711. В данных треугольниках построим серединные перпендикуляры к двум сторонам. Точка их пересечения и будет центром описанной окружности (проходя через одну вершину треугольника, окружность проходит и через две другие). Такая окружность и есть искомая.
Исходя из задачи 704, в прямоугольном треугольнике r равен половине гипотенузы. Таким образом, центр описанной окружности прямоугольного треугольника находится на середине гипотенузы.

712. MN – данная хорда: $\angle M = \dfrac{\smile MN}{2}$;

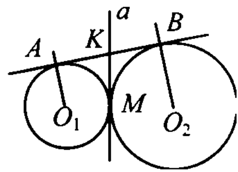


$\angle N = \dfrac{\smile MN}{2}$ $\angle M + \angle N = \smile MN$.

По условию $\smile MN \neq 180°$. Значит, касательные пересекаются (углы M и N – односторонние при касательных).
Что и требовалось доказать.

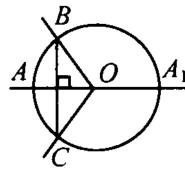


713. 1) $P_{ANM} = AM + AN + MN$.
$BM = MX$ и $XN = NC$ (свойство касательных отрезков),
т. е. $P_{ANM} = NA + (MX + XN) + AM =$
$= NA + MB + NC + AM = AB + AC$, ч.т.д.
2) $\angle MON = \angle XON + \angle MOX$;
$\Delta BMO = \Delta MXO$ (по катету $BM = MX$ и гипотенузе MO), значит $\angle MOX = \angle BOM$.
Также из $\Delta CON = \Delta XON$: $\angle CON = \angle XON$, т. е.
$\angle MON = \angle BOM + \angle CON$, а именно, не зависит от X, ч.т.д.

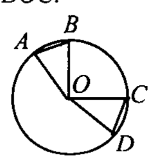


714. 1) M – точка касания окружностей, a – их касательная; $a \perp O_1O_2$;
2) по свойству касательных к окружности $O_1A_1 \perp AB$, $O_2B \perp AB$, т.е. $O_1A \| O_2B$, (по свойству параллельных прямых).
3) В $MKBO_2$: $BO_2 = MO_2 = R$, $\angle M = \angle B = 90°$, т. е. $MKBO_2$ – квадрат.
4) Также, $AKMO_1$ – квадрат, т.е. $MK = KB = AK$, значит, K равноудалена от A, M B, т. е. K – центр окружности радиуса AK, где $AK = \dfrac{1}{2}AB$.

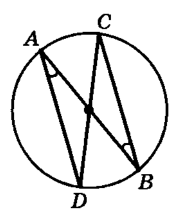
Имеем: $M \in$ Окр (K; $\dfrac{1}{2}AB$). Т. к. $MK = AK = \dfrac{1}{2}AB$, прямые AO_1, BO_2, O_1O_2 – касательные к этой окружности.



715. 1) $BO = OB_1 = R$, следовательно, ΔB_1BO – равнобедренный из усл. $OA \perp BB_1$, значит $AB = AB_1$;
2) $AB + AB_1 = BB_1$ (или $2AB = BB_1$)
$BB_1 = 180°$ – наибольшее значение, допустим, BB_1 – диаметр окружности, но это противоречит условию, значит, $BB_1 < 180°$, т. е. $AB = BB_1 < 90° < 180°$.



716. 1) По св-ву $AB = DC$, следовательно, $\angle AOB = \angle DOC$.
2) В ΔAOB и ΔDOC: $OC = AO = R$, $OD = OB = R$, $\angle AOB = \angle DOC$, значит, $\Delta AOB = \Delta DOC$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $AB = CD$, ч.т.д.

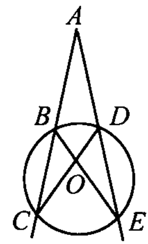


717. $BC \| AD$; $\angle A = \angle B$ (как накрест лежащие при пересечении $BC \| AD$ секущей AB). Значит, $\cup DB = \cup AC$. Запишем дугу:
$\cup CD = \cup CB + \cup BD = (\cup AB - \cup AC) +$
$+ \cup BD = \cup AB$. $\cup AB = 180°$ (по условию).
Значит, $\cup CD = 180°$. CD – диаметр окружности, что и требовалось доказать.

718. Решение приведено в учебнике.

719. <u>**Дано:**</u> Окр(O; R); AC, AE – секущие.

<u>**Доказать:**</u> $\angle CAE = \dfrac{1}{2}(CE - BD)$.



<u>**Доказательство.**</u>

1) В ΔACD: $\angle A = 180° - (\angle C + \angle D)$ (*);

2) $\angle D = 180° - \angle CDE$, $\angle CDE$ – вписанный,

следовательно, $\angle CDE = \dfrac{1}{2}CE$, т. е.

$\angle D = 180° - \dfrac{1}{2}CE$ (1);

$\angle C$ – вписанный, следовательно, $\angle C = \dfrac{1}{2}BD$ (2).

Подставим в формулу (*) значения (1) и (2), имеем:

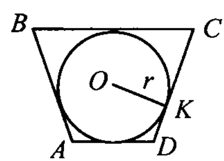
$\angle A = 180° - (180° - \dfrac{1}{2}CE + \dfrac{1}{2}BD) = 180° - 180° - \dfrac{1}{2}CE -$

$- \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}$ $(CE - BD)$, что и требовалось доказать.

720. Вершина разностороннего треугольника не может лежать серединном перпендикуляре к какой-либо стороне, т. к. каждая точка серединного перпендикуляра должна быть равноудалена от концов отрезка, к которому проведен этот перпендикуляр (по свойству). А это условие не выполняется, т. к. $AB \neq AC \neq BC$.

721. Пусть x и y – смежные стороны прямоугольника. Тогда окружность можно вписать в него при условии $2x = 2y$, т. е. $x = y$. Значит, этот прямоугольник – квадрат, ч.т.д.

722. 1) $ABCD$ – описанный, следовательно,



$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}P_{ABCD} \cdot OK$, т. е.

$P_{ABCD} = \dfrac{2S_{ABCD}}{OK} = \dfrac{2S}{R}$.

2) Также, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$.
$ABCD$ – описанный, следовательно,

$CD + AB = AD + BC = \dfrac{1}{2}P_{ABCD}$, т. е.

$$\begin{cases} CD + AB = \dfrac{S}{r}; \\ AD + BC = \dfrac{S}{r} \end{cases} \begin{cases} 3x + 2x = \dfrac{S}{r}; \\ y + 2y = \dfrac{S}{r} \end{cases}$$

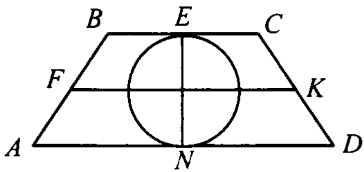
x см – длина 1 части, y см – длина 1 части.

$$\begin{cases} 5x = \dfrac{S}{r}; \\ 3y = \dfrac{S}{r} \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{S}{r}. \\ y = \dfrac{S}{r} \end{cases}$$

Имеем:

$$AB = 2 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{2S}{5r},\ BC = 2 \cdot \frac{S}{3r} = \frac{2S}{3r};\ CD = 3 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{3S}{5r};\ AD = \frac{S}{3r}.$$

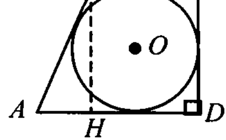
723. **Дано:** $ABCD$ – трапеция;
BC, AD – касательные к окр(O; R);
FK – средняя линия.
Доказать: $O \in FK$.



Доказательство.
1) BC – касательная, следовательно, $OE \perp BC$, AD – касательная, следовательно, $ON \perp AD$; $BC \parallel AD$ (из определения трапеции), значит, FN – единственный перпендикуляр к BC и AD, проходящий через точку O.
2) FK – средняя линия трапеции, следовательно, $FK \parallel BC \parallel AD$ и $FK \cap EN = O$ и $EO = ON$ (т. Фалеса).

724. Решение приведено в учебнике.

725. **Дано:** $ABCD$ – трапеция; $\angle D = 90°$;
$BC = a$; $AD = b$; $CD = ?$



Решение.
В ΔABH: $\angle H = 90°$, $AH = b - a$;
$ABCD$ – описанный, следовательно,
$AB + CD = AD + BC = a + b$,
т. е. $AB + BH = a + b$.
Пусть $BH = x$, тогда $AB = (a + b) - x$.
$BH^2 = AB^2 - AH^2$ (по т. Пифагора), т. е.
$x^2 = (a + b)^2 - 2x\,(a + b) + x^2 - (b - a)^2$;

$$x^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2x(a + b) + x^2 - b^2 + 2ab - a^2.$$

$$2x(a + b) = 2ab,\ x = \frac{2ab}{2(a+b)} = \frac{ab}{(a+b)}.$$

726. Из условия следует, что центр описанной окружности является общей точкой серединного перпендикуляра и медианы. Рассмотрим два варианта.

а) Серединный перпендикуляр и медиана совпадают, т. е. вершина, из которой проведена медиана, равноудалена от концов противолежащей стороны. Таким образом, данный треугольник равнобедренный.

б) Серединный перпендикуляр и медиана не совпадают. Значит, у них только одна общая точка – середина стороны, к которой проведена медиана. Таким образом, центр описанной окружности лежит на стороне данного треугольника, т. е. треугольник прямоугольный.

727. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $AB = BC$;

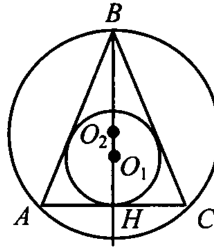
O_1 – центр вписанной окружности;

O_2 – центр описанной окружности;

$BH \perp AC$, $AH = HC$.

<u>**Доказать:**</u> $O_1, O_2 \in BH$.

<u>**Доказательство.**</u>



1) O_2 – центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, значит, $O_2 \in HB$, т. к. $HB \perp AC$.

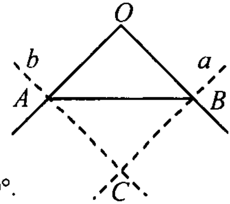
2) O_1 – центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, значит, $O_1 \in HB$, HB – биссектриса (свойство высоты равнобедренного треугольника).

3) Имеем: $C_2 \in HB$ и $O_1 \in BH$.

728. У ромба противоположные углы равны. Предположим, что около ромба можно описать окружность, тогда противоположные углы в сумме должны составлять 180°. Так как они равны, то каждый из них прямой, а значит, ромб является квадратом, что и требовалось доказать.

729. Решение приведено в учебнике.

730. __Дано:__ ΔAOB; $a \perp b$, $b \perp OA$;
$a \cap b = C$.



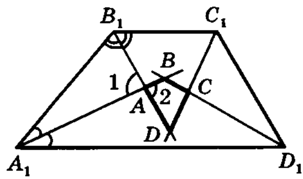
__Доказать:__ около $ACBO$ можно описать окружность.

__**Доказательство.**__

1) $a \perp b$, $b \perp OA$, следовательно, $\angle AOC =$ $= \angle OBC = 90°$, т. е. $\angle OBC + \angle OAC = 180°$.

2) В четырехугольнике $\angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360°$; $\angle C =$ $= \angle O = 180°$, а именно: суммы противоположных углов равны по 180°, и около $AOBC$ можно описать окружность.

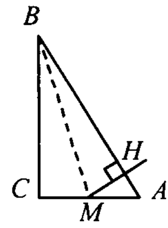
731. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $A_1B_1C_1D_1$ – данная трапеция. $\angle 1 = \angle 2$;



$\angle 1 = 180° - \dfrac{\angle A_1}{2} - \dfrac{\angle B_1}{2}$, но

$\angle A_1 + \angle B_1 = 180°$ (как углы трапеции). Отсюда $\angle 2 = 90°$. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle A + \angle C = 180°$, значит, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, ч.т.д.

732. В четырехугольнике $HBCM$
$\angle C = \angle H = 90°$, т. е. $\angle C + \angle H = 180°$, тогда $\angle M + \angle B = 180°$, значит около $HBCM$ можно описать окружность.

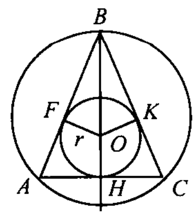


$\angle MHC$ – вписанный, следовательно,

$\angle MBC = \dfrac{1}{2} HC$, значит, $\angle MHC = \angle MBC$,

что и требовалось доказать.

733. __Дано:__ ΔABC;
$AB = BC = AC$; $R = 10$ см; $r = ?$



__**Решение.**__

1) ΔABC – равносторонний, следовательно, центры окружностей совпадают.

2) $HB \perp AC$, следовательно,
BH – биссектриса (свойство равностороннего треугольника).

Т. е. в ΔPBO: $\angle F = 90°$, $\angle B = 30°$, $BO = 10$см, значит,

OF лежит против $\angle R = 30°$, т. е., $FO = \frac{1}{2} BO = 5$ см.

734. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм, вписанный и описанный.

Доказать: $ABCD$ – квадрат.

Доказательство.

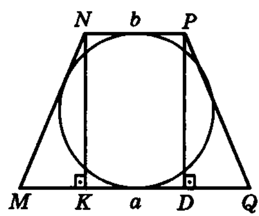
1) $ABCD$ – вписанный, следовательно, $\angle C + \angle A = 180°$, $\angle D + \angle B = 90°$, т. е. $ABCD$ – квадрат.

2) $ABCD$ – описанный, следовательно, $CD + AB = AD + BC$.

В параллелограмме $BC = AD$, $AB = CD$, значит, $AB = BC = CB = AO$, т. е., $ABCO$ – ромб, но $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$, значит этот ромб – квадрат.

Четырехугольник вписанный и описанный одновременно – квадрат, ч.т.д.

735. $MNPQ$ – данная трапеция. $MQ = a$; $NP = b$, причем $a > b$.



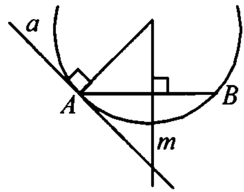
По условию, около $MNPQ$ можно описать окружность, значит, трапеция равнобедренная, т. е. $MN = PQ$.

Поэтому получаем:

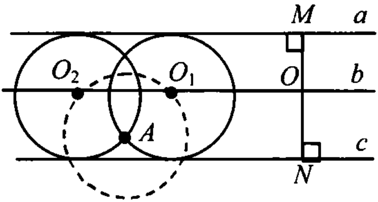
$MN + PQ = 2MN = (a + b)$ (т. к. в трапецию можно вписать окружность) и $MN = \frac{a+b}{2}$.

Проведем $NK \perp MQ$ и $PD \perp MQ$. Тогда MK и PD равны диаметру вписанной окружности. $\Delta MNK = \Delta PDQ$ (по гипотенузе и катету). Значит, $MK = DQ$, $KD = NP = b$ и $MK = \frac{a-b}{2}$. По теореме Пифагора для ΔMNK получаем: $MN^2 = NK^2 + MK^2$;

$\left(\frac{a+b}{2}\right) = 4r^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, откуда $16r^2 = 4ab$; $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.



736. Отрезок AB.
Строим серединный перпендикуляр m к AB.
Из точки A строим перпендикуляр n
к прямой a.
$n \cap m = O$ – центр искомой окружности.



737. **Дано:** $a \| b$, $A \notin a$, $A \notin b$.
Построить окружность, такую, чтобы $A \in$ Окр.
a, b – касательные к Окр.

Построение:

1) a и b – касательные к одной окружности, $a \| b$, значит, они проходят через концы диаметра. $r = ?$

а) восстановим перпендикуляр из $M \in a$ к прямой b;

б) построим серединный перпендикуляр к MN;

в) $\cap MN = O$, $ON = MO = R$;

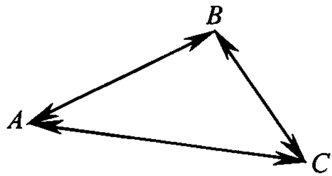
г) проведем окружность с центром в точке A и радиусом R;

д) окружность пересекает прямую в двух точках O_2 и O_1, O_2 и O_1 – есть центры искомых окружностей.

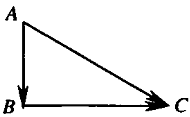
Глава IX.
Векторы

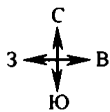
§ 1 Понятие вектора

738. $\overrightarrow{AB}$; A – начало, B – конец.
$\overrightarrow{BC}$; B – начало, C – конец.
$\overrightarrow{CA}$; C – начало, A – конец.
$\overrightarrow{BA}$; B – начало, A – конец.
$\overrightarrow{CB}$; C – начало, B – конец.
$\overrightarrow{AC}$; A – начало, C – конец.



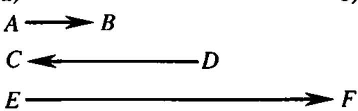
739.



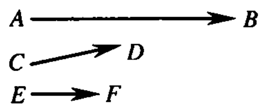


Масштаб: в 1 см 200 км, т. е. 1 : 20 000 000.

740. **а)**



б)

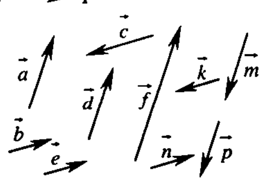


741. **а)** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{d}, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{f}$;

б) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{e}, \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{n}$;

в) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{k}, \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$;

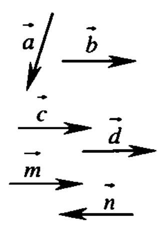
г) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{g}, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{m}$.



742. **а)** $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ см; $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарны.

б) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{d}, |\vec{c}| = |\vec{d}| = 3{,}5$ см. $\vec{c} = \vec{d}$. Векторы равны, т. к. их длины равны и они сопоставимы.

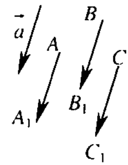
в) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}, |\vec{m}| = |\vec{n}| = 3$ см.



743. $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, т. к. $\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \left|\vec{a}\right|$ и $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

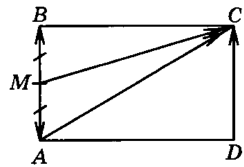
$\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, т. к. $\left|\overrightarrow{BB_1}\right| = \left|\vec{a}\right|$ и $\overrightarrow{BB_1} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

$\overrightarrow{CC_1} = \vec{a}$, т. к. $\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = \left|\vec{a}\right|$ и $\overrightarrow{CC_1} \uparrow\uparrow \vec{a}$.



744. Векторные величины – скорость и сила, т. к. для них необходимо знать не только числовое значение, но и направление.

745. По условию $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.



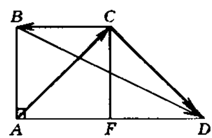
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = 3$ см, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = 4$ см.

$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{18{,}25}$ см.

$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{2}AB = 1{,}5$ см;

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ см.

746. $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{CF^2 + FD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ см;



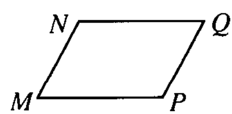
$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ см.

По теореме Пифагора в ΔABC:

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Учтем, что

$BC = AD - FD = 12 - 5 = 7$ см и $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{74}$ см.

747. а) $MNPQ$ – параллелограмм.



Коллинеарные векторы:

$\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{QM}$, где $\overrightarrow{NP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MQ}$ и

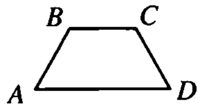
$\overrightarrow{NP} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{NP} \uparrow\downarrow \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{PN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{QM}$

и $\overrightarrow{PN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MQ}$.

Коллинеарные векторы: $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QP}$, где $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PQ}$ и

$\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NM}$ и

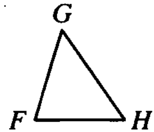
$\overrightarrow{PQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{QP}$.



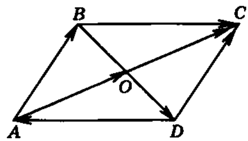
б) $ABCD$ – трапеция.
Коллинеарные векторы:
$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$, причем $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ и

$\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ и

$\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$.



в) FGH – треугольник.
Коллинеарные векторы:
$\overrightarrow{FG} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{HF}$.



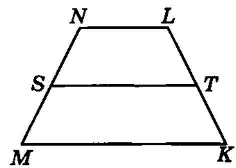
748. **а)** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ и

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ не равны: $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA}$;

в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$ равны: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$;

г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не равны (они не коллинеарны).



749. По условию, $MNLK$ – равнобедренная трапеция. $MS = SN$; $LT = TK$.

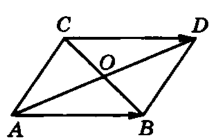
а) Векторы $\overrightarrow{NL}$ и $\overrightarrow{KL}$ не коллинеарны, значит, $\overrightarrow{NL} \neq \overrightarrow{KL}$.

б) Векторы
$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SN} : |\overrightarrow{MS}| = |\overrightarrow{SN}|; \overrightarrow{MS} \uparrow\uparrow \overrightarrow{SN}$.

в) Векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$ не коллинеарны, $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{KL}$.

г) Векторы $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{KM}$ не равны: $\overrightarrow{TS} \neq \overrightarrow{KM}$.

д) $|\overrightarrow{TL}| = |\overrightarrow{KT}|; \overrightarrow{TL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KT}$ векторы $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$ равны.



750. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т. е. точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC. $AB \parallel CD$, значит, точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD, а точки C и D – по одну сторону от прямой AB. Значит, $ACDB$ – четырехугольник. Но $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, значит, $ACDB$ – параллелограмм. Диагонали AD и CD параллелограмма в точке пересечения O делятся пополам, т. е. середины отрезков AD и BC совпадают, ч.т.д. Докажем обратное утверждение. Середины отрезков BC и AD совпадают в точке O. Точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD и по ту же сторону, что и точка O. Значит, $ABDC$ – четырехугольник. Но т. к. $OC = OB$ и $AO = OD$, то $ABDC$ – параллелограмм, т. е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Данные утверждения верны, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ненулевые, когда $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ нулевые, если векторы лежат на одной прямой.

751. **а)** 1) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, значит $AB \| DC$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$, т. е $DC = AB$.
В $ABCD$ противолежащие стороны параллельны и равны, т. е. $ABCD$ – параллелограмм (по I признаку).

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, т. е. $BC = AB$, значит смежные стороны равны и все стороны параллелограмма $ABCD$ равны, значит, $ABCD$ – ромб.

б) $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, т. е. $AB \| DC$. $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны, значит AD не параллельна BC.
Т. е. в четырехугольнике $ABCD$ две стороны параллельны, а две другие не параллельны, следовательно, $ABCD$ – трапеция.

752. **а)** если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ – верно;

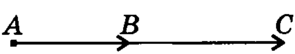
б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны – верно;

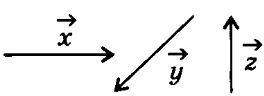
в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – не верно;

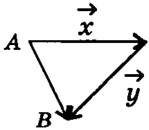
г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$ – не верно;

д) если $\vec{a} = 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – верно.

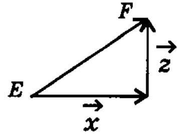
§ 2 Сложение и вычитание векторов

753. 

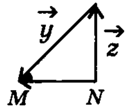
754. 



$\overrightarrow{AB} = \vec{x} + \vec{y}$

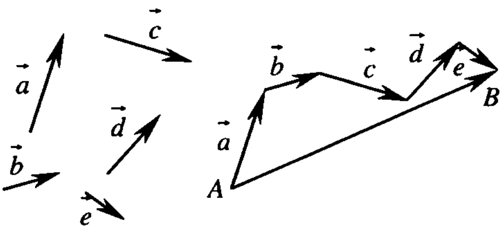


$\overrightarrow{EF} = \vec{x} + \vec{z}$



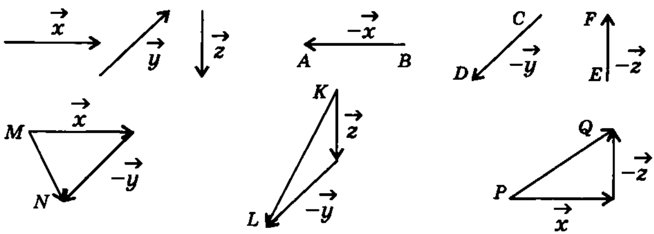
$\overrightarrow{MN} = \vec{z} + \vec{y}$

755.



$\overline{AB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{e} + \vec{d}$.

756.



$\overrightarrow{MN} = \vec{x} - \vec{y}$

$\overrightarrow{KL} = \vec{z} - \vec{y}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{x} - \vec{z}$

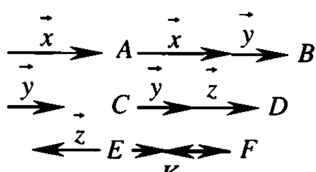
757. $\overline{CD} = \vec{y} - \vec{z}$;

$\overline{AB} = \vec{x} + \vec{y}$;

$\overline{EF} = \vec{x}$, $\overline{FK} = \vec{z}$;

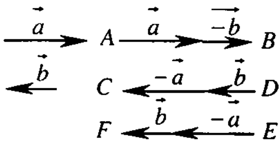
$\overline{EF} + \overline{FK} = \vec{x} + \vec{z}$;

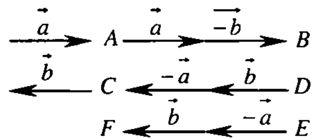
$\overline{EK} = \vec{x} + \vec{z}$.



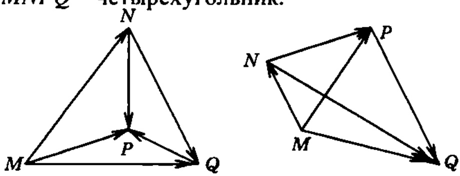
758. **а)** $AB = \vec{a} - \vec{b}$; **б)** $CD = \vec{b} - \vec{a}$; **в)** $EF = \overrightarrow{-a} + \vec{b}$.

I случай: $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. **II случай:** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.





759. $MNPQ$ – четырехугольник.



а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$ (по правилу треугольника),

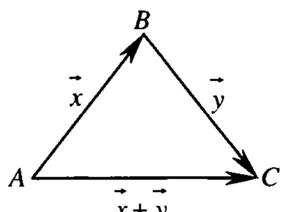
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$, т. е. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$.

б) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (по правилу треугольника),

$\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP}$, т. е. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$.

760. 1) Если A, B, C не лежат на одной прямой, то векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{x} + \vec{y}$ образуют ΔABC. По неравенству треугольника $AC < AB + BC$, т. е. $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

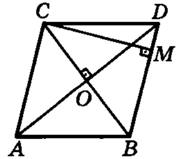
2) Если A, B, C лежат на одной прямой, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, а это не так по условию.



761. По правилу многоугольника имеем:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA}$, но $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ из определения.

762. ΔABC – равнобедренный, т. е. $AB = BC = CA = a$.



а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ и $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a$.

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ ($CO = OB$), тогда

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\overrightarrow{AO} = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

в) Достроим ΔABC до ромба $ABDC$, CM – его высота. Тогда получаем: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CM}$ и

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right| = 2\left|\overrightarrow{CM}\right| = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

г) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$ и $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a$.

д) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ и $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=a$.

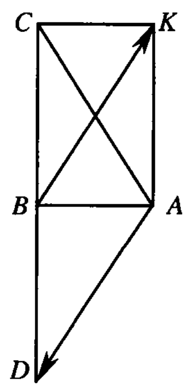
763. а) $\left|\overrightarrow{BA}\right|-\left|\overrightarrow{BC}\right| = BA-BC=6-8=-2. \left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|=\overrightarrow{CA}=CA$.

По т. Пифагора $AC^2=BA^2+BC^2$, значит

$AC=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+48}=\sqrt{100}=10$, значит $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|=10$.

б) $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=6+8=14. \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\overrightarrow{AC}=AC=10$.

в) $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=6+8=14$. Построим $AK \| BC$ и $AK=BC$. $ACKB$ – параллелограмм и $\angle CBA=\angle BAK=90°$, значит $ACKB$ – прямоугольник.



$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BK}, \left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\overrightarrow{BK}=BK$.

($\angle A=90°$) по т. Пифагора:
$AK^2+AB^2=BK^2$, отсюда

$BK=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

г) $\left|\overrightarrow{AB}\right|-\left|\overrightarrow{BC}\right|=6-8=-2$.

Построим $BD=BC$ и C, B, D лежат на одной прямой, тогда $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BD}$ и

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

По т. Пифагора $AD^2=AB^2+BD^2$, отсюда

$AD=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$, значит $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right|=10$.

764. а) Учитывая, что $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, имеем:

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD}\right)=$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DK}\right)=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{AK}$.

б) $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)-\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD}\right)=$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)-\left(\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AM}$.

765. По правилу треугольника: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

$\vec{p}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{XZ}+\overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{XX}=\vec{0}$,

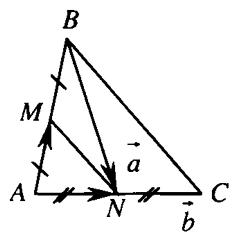
$\vec{q}=\left(\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{ZX}\right)+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{XX}=\vec{0}$,

$\vec{r}=\left(\overrightarrow{ZY}-\overrightarrow{XY}\right)-\overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{ZY}+\overrightarrow{YX}+\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{ZZ}=\vec{0}$.

766. $\overrightarrow{XY}=-\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)+\vec{c}+\vec{d}$.

767. Решение приведено в учебнике.

768. $\overrightarrow{BM}=-\vec{a}$, т. к. $\left|\overrightarrow{BM}\right|=\left|-\vec{a}\right|$, ($M$ – середина AB) и $\overrightarrow{BM}\uparrow\downarrow\vec{a}$.



$\overrightarrow{NC}=-\vec{b}$, т. к. $\left|\overrightarrow{NC}\right|=\left|\vec{b}\right|$, ($N$ – середина AC) и $\overrightarrow{NC}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$, тогда

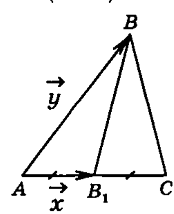
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}$;

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\vec{a}+(-\vec{a})+\vec{b}=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\vec{a}$.

769. По условию BB_1 – медиана.

$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AB_1}=\vec{x}$; $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB}=\vec{x}-\vec{y}$;

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{y}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{B_1C}=(\vec{x}-\vec{y})+\vec{x}$.



770. Выразим $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$.

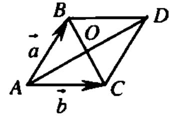
б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, $CB\parallel AD$ и $CB=AD$, $\overrightarrow{CB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$, тогда

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right) = -\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = -\vec{a} - \vec{b}$.

в) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{DA}$, $DA \parallel BC$ и $DA = BC$, $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BC}$, тогда

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{DA}\right) = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{a} - \vec{b}$.

771. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$.



$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ и $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, значит

$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$, тогда $\overrightarrow{CO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ и $\left|\overrightarrow{CO}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|$, поэтому

$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$.

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$.

772. По правилу треугольника: $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC}$.

Имеем: $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$;

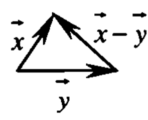
$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{XD}$.

Сравним левую и правую части уравнения, имеем:

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, и это верно.

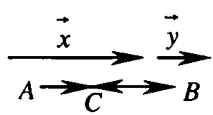
Из $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ и $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ (т. к. $ABCD$ – параллелограмм), ч.т.д.

773. 1) Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны, то по неравенству треугольника имеем:



$|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, т. к. $|\vec{x} - \vec{y}|, |\vec{x}|, |\vec{y}|$ – стороны треугольника.

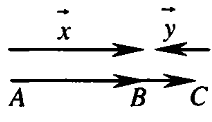
2) Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны и $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$,то точки A, B, C лежат на одной прямой и $AC = AB - BC$.



$\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{x} - \vec{y}$, поэтому

$|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

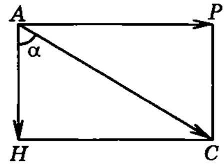
3) Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны и



$\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{y}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{x} - \vec{y}$, т. е.
$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

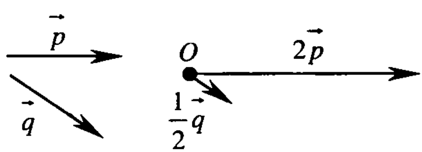
774. Вектор скорости парашютиста без ветра равен $\overrightarrow{AH}$. $|\overrightarrow{AH}| = 3$ м/с, $\overrightarrow{AP}$ – вектор скорости ветра.



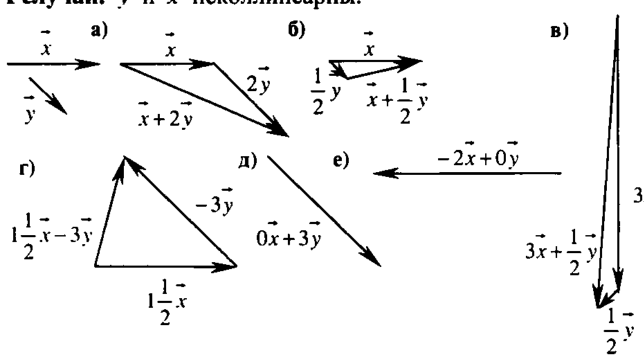
$|\overrightarrow{AP}| = 3\sqrt{3}$ м/с, $\overrightarrow{AC}$ – вектор скорости парашютиста при ветре. ΔAHC – прямоугольный: $\angle HAP = 90°$; $APCH$ – прямоугольник: $AP = HC = 3$. По теореме Пифагора найдем: $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = 6$; т. е. $\angle ACH = 30°$; $\angle\alpha = 60°$.

§ 3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

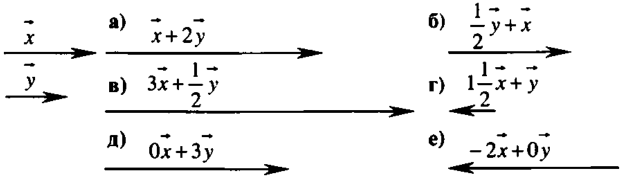
775.



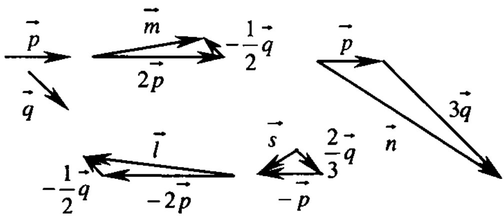
776. **I случай.** $\vec{y}$ и $\vec{x}$ неколлинеарны.



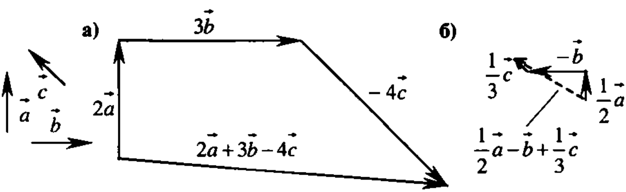
II случай. $\vec y$ и $\vec x$ коллинеарны.



777.



778.



779. $\vec p = 3\vec a$, значит, $\vec p \uparrow\uparrow \vec a; |\vec p| = |3||\vec a|; |\vec a| = \frac13|\vec p|$.

$-\vec a \uparrow\downarrow \vec p, |-\vec a| = |\vec a| = \frac13|\vec p|; \frac12\vec a \uparrow\uparrow \vec p, \left|\frac12\vec a\right| = \frac12|\vec a| = \frac16|\vec p|$;

$-2\vec a \uparrow\downarrow \vec p, |-2\vec a| = 2|\vec a| = \frac23|\vec p|; 6\vec a \uparrow\uparrow \vec p, |6\vec a| = 6|\vec a| = 2|\vec p|$.

780. а) $\left|\overrightarrow{1\cdot a}\right| = |1|\cdot\left|\vec a\right| = \left|\vec a\right|, 1>0$, значит $\overrightarrow{1\cdot a} \uparrow\uparrow \vec a$, т. е. $\overrightarrow{1\cdot a} = \vec a$.

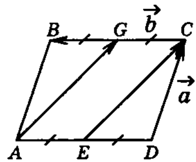
б) $\left|\overrightarrow{-1\cdot a}\right| = |-1|\cdot\left|\vec a\right| = \left|\vec a\right|, -1<0$, значит $\overrightarrow{-1\cdot a} \uparrow\uparrow \vec a$, т. е. $\overrightarrow{-1\cdot a} = \vec a$.

781. а) $2\vec x - 2\vec y = 2(\vec m + \vec n) - 2(\vec m - \vec n) = 2(2\vec n) = 4\vec n$.

б) $2\vec x + \frac12\vec y = 2(\vec m + \vec n) + \frac12(\vec m - \vec n) = 2\vec m + 2\vec n + \frac12\vec m - \frac12\vec n = \frac52\vec m + \frac32\vec n$.

в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}=-\vec{m}-\vec{n}-\frac{1}{3}\vec{m}+\frac{1}{3}\vec{n}=-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$.

782. $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. G – середина BC;
E – середина AD.

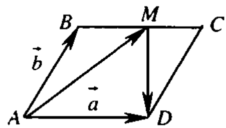


$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{EC}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

783. $BM : MC = 3 : 1$, значит $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.



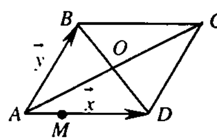
$ABCD$ – параллелограмм, значит
$AD\|BC$, $AD = BC$, значит $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}==\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{a}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$.

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}$, значит

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$.

784. а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{x}+\vec{y}$,



$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\frac{1}{2}\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$,

$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=-\frac{1}{2}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$,

$\overrightarrow{DB}=\vec{y}-\vec{x}$, $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left(\vec{y}-\vec{x}\right)=\frac{1}{2}\vec{y}-\frac{1}{2}\vec{x}$,

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}=\vec{x}$,

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}=\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}=\frac{1}{2}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$,

$\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AC}=-\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=-\vec{x}-\vec{y}$.

б) $AM = \frac{1}{2}MD$, значит $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{MD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$;

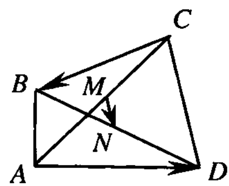
$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$,

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}$,

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} = -\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}\right) + \frac{1}{3}\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{x} =$

$= -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

785. $AM = MC$, $BN = ND$, значит



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} =$

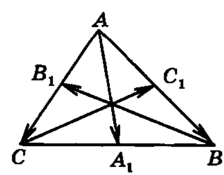
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Значит $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$

786. $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ (по условию). A_1 – середина отрезка BC.



$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$;

$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$;

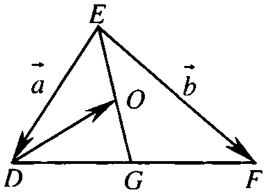
$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}\right) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$; $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{CC_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

787. $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$, значит

$\vec{a} + \overrightarrow{DF} = \vec{b}$, или $\overrightarrow{DF} = \vec{b} - \vec{a}$.

$DG = GF$, значит



$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} =$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

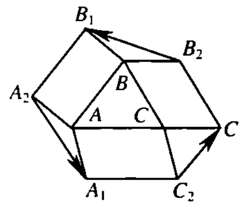
$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO}$. $OE = OG$, поэтому $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} .$$

788. Решение приведено в учебнике.

789. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_2C}, \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_2}$,

т. к. это стороны параллелограммов.



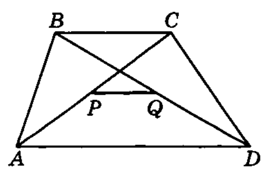
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{C_2C} + \overrightarrow{BB_1} =$$

$$= \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_2} +$$

$$+ \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_2C_1} .$$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_2C_1}$, значит можно построить треугольник со сторонами, параллельными и равными соответственно сторонам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ч.т.д.

790. $ABCD$ – данная трапеция. AD и BC – ее основания, причем $AD > BC$. P и Q – середины диагоналей AC и BD.

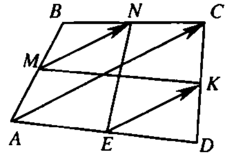


Имеем: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$ (см. задача 785). $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ – коллинеарные векторы, значит, коллинеарен этим векторам. Отсюда $PQ \parallel AD$ и $PQ \parallel CB$.

$\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$ $AD > BC$, отсюда $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| - \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AD}\right| - \left|\overrightarrow{CB}\right|\right)$. $PQ = (AD - CB)$. Ч.т.д.

791. Дано: M, N, K, E – соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA. Доказать: MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.



Построим векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{MN}$:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

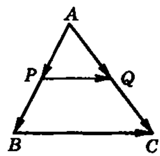
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EK}$, т. е. $MN \| EK$ и $MN = EK$, значит $MNKE$ – параллелограмм по признаку и по свойству параллелограмма MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, ч.т.д.

792. ΔABC – данный, PQ – средняя линия ΔABC.



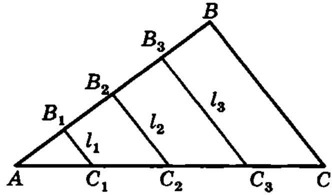
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Отсюда $PQ \parallel BC$, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$ т. е. $PQ = \frac{1}{2} BC$, ч.т.д.

793. $ABCD$ – данная трапеция, AD и BC – ее основания, $AB = 13$ см, $CD = 15$ см, MN – средняя линия.
$AD + BC = P_{ABCD} - (AB + CD) = 48 - (13 + 15) = 20$ см,
$MN = (AD + BC) = 20 : 2 = 10$ см.

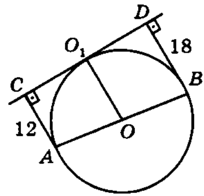
794. Точки B_1, B_2 и B_3 делят сторону AB на 4 равных отрезка: $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, $B_1C_1 \parallel BC$; $B_2C_2 \parallel BC$; $B_3C_3 \parallel BC$.



$B_1C_1 = l_1 = 3{,}4$ (по условию).
B_1C_1 – средняя линия ΔAB_2C_2: $l_2 = 2 \cdot l_1 = 6{,}8$;

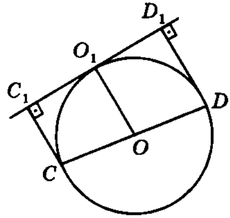
$l_2 = B_2C_2$ – средняя линия ΔABC:
$BC = 2 \cdot l_2 = 13{,}6$; $l_3 = B_3C_3$ – средняя линия трапеции BCC_2B_2:
$l_3 = \frac{1}{2}(BC + l_2) = \frac{1}{2}(13{,}6 + 6{,}8) = 10{,}2.$

795. AB – диаметр данной окружности. Из точек A и B проведем перпендикуляры к касательной. Получим точки пересечения C и D. $OO_1 \perp CD$. $ABDC$ – трапеция, где DB и AC – ее основания, а OO_1 – ее средняя линия ($AO = OB = r$, $AC \parallel OO_1$; $OO_1 \parallel DB$. Значит, $CO_1 = O_1D$). По условию $DB = 18$ см, $AC = 12$ см.



$OO_1 = \frac{1}{2}(DB + AC) = 15$ см. $OO_1 = r = 15$ см. AB – диаметр и $AB = 2r = 30$ см.

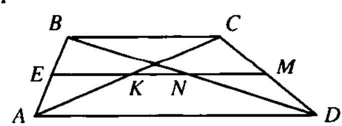
796. $CC_1 \perp C_1D_1$; $DD_1 \perp C_1D_1$; $C_1C \parallel D_1D$. Значит, CDD_1C_1 – трапеция. OO_1 – отрезок, соединяющий центр окружности с точкой касания. OO_1 – средняя линия трапеции CDD_1C_1 (задача 795).



$OO_1 = r$; $OO_1 = \frac{1}{2}CD = 13{,}5$ см;

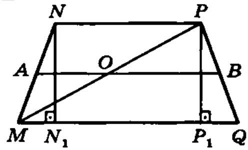
$OO_1 = \frac{1}{2}(DD_1 + CC_1)$; $DD_1 = 2 \cdot OO_1 - CC_1 = 16$ см.

797. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – трапеция; EM – средняя линия; $AK = CK$; $BN = DB$.
<u>**Доказать:**</u> $N, K \in EM$.
<u>**Доказательство.**</u>
$EM \parallel BC \parallel AD$ (т. к. средняя линия параллельна основаниям).



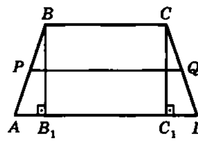
$CM = MD$ и $EM \parallel BC$, тогда по т. Фалеса EM проходит через середину отрезка BD, т. е. через N.
$AE = EB$ и $EM \parallel BC$, тогда по т. Фалеса EM проходит через середину отрезка AC, т. е. через K, ч.т.д.

798. $MNPQ$ – равнобедренная трапеция. AB – средняя линия трапеции, MP – диагональ. $AO = 11$ см; $OB = 35$ см (по условию). $AO \parallel NP$, но $MA = AN$, значит, $MO = OP$; AO – средняя линия ΔMNP: $AO = NP$; $OB = \frac{1}{2}MQ$;



$NP = 2 \cdot AO = 22$ см; $MQ = 2 \cdot OB = 70$ см. Проведем высоты трапеции. $MN_1 = \frac{1}{2}(MQ - NP) = 24$ см; $MN = 48$ см (по условию). Значит, $\angle MNN_1 = 30°$, а $\angle NMQ = 60°$, $\angle PQM = 60°$ (т. к. трапеция $MNPQ$ равнобедренная), $\angle MNP = \angle NPQ = 120°$.

799. PQ – средняя линия трапеции. $BB_1 \perp AD$, $B_1D = 7$ см (по условию).



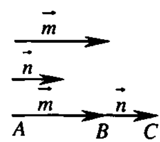
$PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

$AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 2C_1D + B_1C_1$;

$PQ = \frac{1}{2}(2 \cdot C_1D + 2 \cdot B_1C_1) = C_1D + B_1C_1 = B_1D = 7$ см.

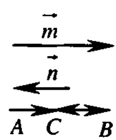
800. I случай. Векторы сонаправлены.

Дано: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$. Доказать: $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.



Выполним сложение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ так: поместим начало вектора $\vec{n}$ в конец вектора $\vec{m}$ и соединим начало вектора $\vec{m}$ и конец вектора $\vec{n}$. Из $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$ следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C, тогда $AB + BC = AC$, и $AC = |\vec{m} + \vec{n}|$, $AB = |\vec{m}|$ и $BC = |\vec{n}|$, значит, $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$, ч.т.д.

II случай. Векторы противоположно направлены.

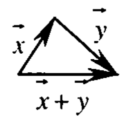


Дано: $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$.

Доказать: $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.

Выполним сложение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ так: поместим начало вектора $\vec{n}$ в конец вектора $\vec{m}$ и соединим затем начало вектора $\vec{m}$ и конец вектора $\vec{n}$. Из $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и C лежит между A и B, тогда $AB = AC + BC$, и $|AC| = |\vec{m}+\vec{n}|$, $|AB| = |\vec{m}|$ и $|BC| = |\vec{n}|$ $AC = AB - BC$, значит $|\vec{m}+\vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$, ч.т.д.

801. Доказать: $|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

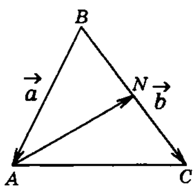


I случай. $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны. Неравенство верно, т. к. $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$, $|\vec{x}| - |\vec{y}|$ – стороны треугольника, и по известному неравенству имеем:

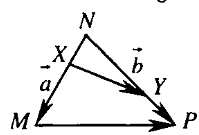
$|\vec{x}+\vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, т.е. $|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x}+\vec{y}|$.

II случай. $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, то по предыдущей задаче $|\vec{m}+\vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$, если $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, и $|\vec{m}+\vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$, если $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, значит $|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$ – верно, ч.т.д.

802. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$.

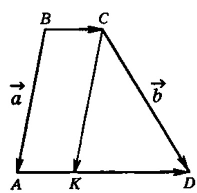


803. $\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}$, значит $\overrightarrow{NX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{NM}$; $\frac{NY}{YP} = \frac{3}{2}$, значит $\overrightarrow{NY} = \frac{2}{5}\overrightarrow{NP}$.

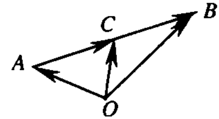


$\overrightarrow{NX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{NY}$, значит $\overrightarrow{XY} = \frac{3}{5}\overrightarrow{NP} - \frac{2}{5}\overrightarrow{NM} = \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$.

804. $BC = \frac{1}{3}AD$ (по условию). $AK = \frac{1}{3}AD$, значит, $AK = BC$ и $ABCK$ – параллелограмм.



$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}; \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{b} - \vec{a}; \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$



805. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$, значит

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, значит

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$, тогда

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

806. $AC : CD = m : n$; $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

значит, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n}\overrightarrow{OB} - \frac{m}{n}\overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OC} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB}$. $\frac{m+n}{n}\overrightarrow{OC} = \frac{n \cdot \overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{OB}}{n}$;

$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

807. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1}; \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC_1}$.

Складываем почленно правые и левые части равенств:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$.(1)

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right); \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right); \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) =$

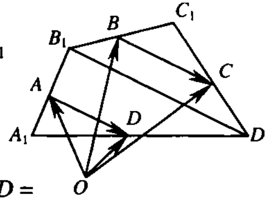
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$,

т. е. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ – нулевой вектор. (2)

Из (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, ч.т.д.

808. Построим диагональ B_1D_1.



B – середина B_1C_1, C – середина C_1D_1 и $BC = \frac{1}{2}B_1D_1$.

A – середина A_1B_1, D – середина A_1D_1, следовательно, AD – средняя линия ΔA_1B_1D), значит, $AD \| B_1D_1$ и $AD = \frac{1}{2}B_1D_1$. $BC \| B_1D_1$, $BC = \frac{1}{2}B_1D_1$ и $AD = \frac{1}{2}B_1D_1$, тогда $BC = AD$.

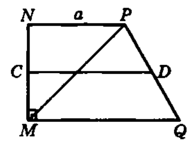
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, следовательно, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, значит $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Итак, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$,

тогда $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ или $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, ч.т.д.

809. $MNPQ$ – данная трапеция. $\angle M = \angle N = 90°$; $\angle P = 120°$ (по условию). CD – средняя линия трапеции.



$MP = PQ = a$ (по условию); $\angle Q = 60°$; $\angle PMQ = \angle MPQ = 60°$. ΔMPQ – равносторонний. $MP = PQ = MQ = a$. $\angle NMP = 90° - 60° = 30°$. Значит,

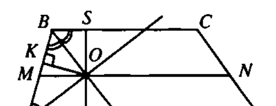
$NP = \frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}a$. $CD = \frac{1}{2}(MQ + NP) = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2}a) = \frac{3}{4}a$.

810. <u>**Дано:**</u> MN – средняя линия,

O – вершина $\angle AOB$, AO – биссектриса $\angle A$, BO – биссектриса $\angle B$.

<u>**Доказать:**</u> $O \in MN$.

<u>**Доказательство.**</u>



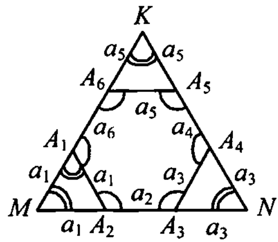
Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон. $OS \perp BC$, $OK \perp AB$, $OF \perp AD$.

Точка O лежит на биссектрисе $\angle ABC$, значит O равноудалена от сторон BA и BC, тогда $OS = OK$.

Точка O лежит на биссектрисе $\angle BAD$, значит O равноудалена от сторон AB и AD, тогда $OK = OF$. $OS = OK$ и $OK = OF$, значит, $OS = OF$, следовательно, $O \in MN$, где MN средняя линия, ч.т.д.

Задачи повышенной трудности

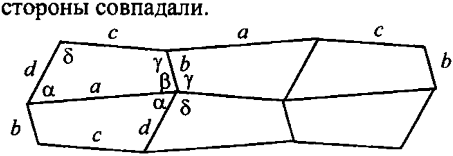
Задачи к главе V

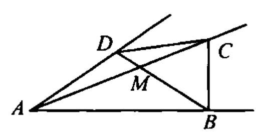


811. Обозначим стороны шестиугольника через $a_1, a_2, \ldots a_6$. Продолжив стороны A_1A_6, A_5A_4, A_2A_3, получим ΔMNK. Если α – угол шестиугольника, то $6 \times \alpha =$ $= 180° \cdot (6 - 2)$, $\alpha = 120°$. Все углы в ΔMA_1A_2, ΔNA_3A_4, ΔKA_5A_6 равны 60°, все эти треугольники, а также ΔMNK – равносторонние. Приравнивая выражения $MN = a_1 + a_2 + a_3$, $NK = a_3 + a_4 + a_5$, $MK = a_1 + a_6 + a_5$, получим после несложных преобразований: $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$.

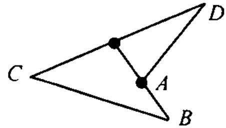
812. Из $a_1 - a_4 = a_5 - a_2$ следует $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$, $a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5$. Аналогично получаем $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_6 + a_5$. Строим равносторонний ΔMNK со сторонами этой длины, откладываем на них отрезки $MA_1 = MA_2 = a_1$, $NA_3 = NA_4 = a_3$, $KA_5 = KA_6 = a_5$. Проведя отрезки A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, получим искомый шестиугольник.

813. Плитки можно приложить так, чтобы в общих вершинах оказались углы α, β, γ, δ, сумма которых равна 360°, а равные стороны совпадали.

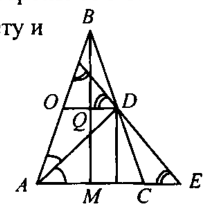




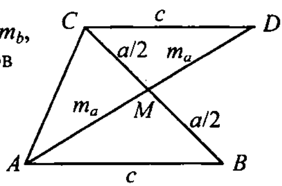
814. По определению выпуклого многоугольника вершины C и D лежат в одной полуплоскости α, имеющей границу AB, а C и B – в одной полуплоскости β имеющей границу AD. Внутренняя область γ угла A является пересечением α и β. В ней лежит точка C, а значит, и луч AC. Поэтому луч AC пересекает отрезок BD в некоторой точке M. Аналогично луч BD пересекает отрезок AC в точке M. Следовательно, M – точка пересечения отрезков AC и BD.



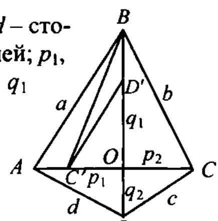
815. Для выпуклого четырехугольника это доказано в № 814. Пусть четырехугольник $ABCD$ – невыпуклый, то есть расположен по разные стороны от прямой, содержащей какую-нибудь его сторону, например, AB. Тогда прямая AB пересечет сторону CD в некоторой точке M. Так как сторона CD не пересекает сторону AB, то точка M не лежит между A и B. Если A лежит между B и M, то B и M лежат в разных полуплоскостях β и μ с границей AC; так как M лежит между C и D, то D лежит в той же полуплоскости μ, что и M. Следовательно, B и D лежат в разных полуплоскостях β и μ, то есть по разные стороны от AC. Если B лежит между A и M, то аналогично A и D лежат по разные стороны от BC.



816. Пусть $P = AB \cap ED$. $\Delta APD = \Delta AED$ по катету и острому углу, поэтому
$PD = DE$, $AP = AE = a$, $\angle APE = \angle E$.
Если O – середина AP, то
$OD \parallel AE$, $\angle ODP = \angle E = \angle APE$ и в
ΔOPD $OP = OD = a/2$.
Если $Q = OD \cap BM$, то $MK = QD = OD/2 = a/4$.



817. Пусть в ΔABC a, b, c – стороны, m_a, m_b, m_c – медианы, M – середина отрезков BC и AD. $\Delta CDM = \Delta BAM$ и $CD = c$.
Из ΔACD $2m_a < b + c$,
$m_a < (b + c)/2$, из ΔACM $m_a > b - a/2$,
из ΔABM $m_a > c - a/2$, откуда
$2m_a > b + c - a$, $m_a > (b + c - a)/2$. Получив аналогичные результаты для m_b и m_c, имеем: $(b + c - a)/2 + (a + c - b)/2 +$
$+ (a + b - c)/2 < m_a + m_b + m_c < (b + c)/2 + (a + б)/2 + (a + b)/2$,
$(a + b + c)/2 < m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

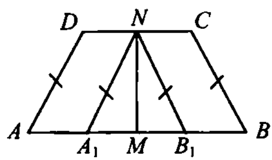


818. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ a, b, c, d – сто-стороны; O - точка пересечения диагоналей; p_1, p_2, q_1, q_2 – их отрезки. По условию $p_1 + a + q_1$
$=$
$= q_1 + b + p_2 = p_2 + c + q_2 = q_2 + d + p_1$
(1). Докажем, что $p_1 = p_2$. Пусть, например,

$p_1 > p_2$, $q_1 \geq q_2$. Если C' и C, D' и D симметричны относительно O, то C' лежит между A и O, D' лежит между B и O или совпадает с B. Тогда $p_1 + a + q_1 = (p_2 + AC) + a + (BD' + q_2) > p_2 + BC + BD' + q_2 \geq p_2 + c + q_2$. Это противоречит (1) и, следовательно, $p_1 = p_2$. Аналогично, $q_1 = q_2$.
Вследствие (1) $a = b = c = d$, и $ABCD$ – ромб.

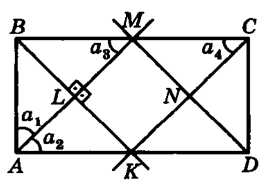
819. Пусть A – данная точка, a – данная прямая, M_0 – ее фиксированная, а M – ее произвольная точка, N_0 – середина AM_0 и $p \parallel a$ – прямая, проходящая через N_0. Если N – середина AM, то N_0N – средняя линия в ΔM_0AM, $N_0N \parallel a$, по аксиоме параллельных N_0N совпадает с p и N лежит на p. Если N – точка пересечения AM и p, то по теореме Фалеса N – середина AM.

820. Пусть M и N – середины оснований трапеции $ABCD$. Проведем $A_1N \parallel AD$ и $B_1N \parallel BC$, тогда $AA_1 = DN = NC = B_1B$. Предположим сначала, что $AD = BC$.



Так как $A_1N = AD = BC = B_1N$, то $A_1M = AM - AA_1 = MB - BB_1 = MB_1$, в равнобедренном ΔA_1NB_1 медиана NM является и высотой: $NM \perp AB$. Предположим теперь, что $NM \perp AB$. Тогда четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ совмещаются с помощью наложения, следовательно, $AD = BC$.

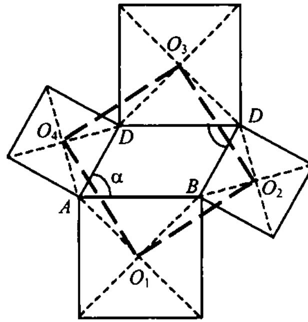
821. AM; BK; CK и DM – биссектрисы углов A, B, C и D. При их пересечении образовался четырехугольник $KLMN$: $\angle a_1 = \angle a_2$ (т. к. AM – биссектриса $\angle A$), $\angle a_2 = \angle a_3$ (как накрест лежащие при пересечении $AD \parallel BC$ секущей AM), $\angle a_2 = \angle a_4$



(т. к. CK – биссектриса $\angle C$ прямоугольника $ABCD$). Поэтому $\angle a_1 = \angle a_2 = \angle a_3 = \angle a_4$. Так как $\angle a_3 = \angle a_4$, то $AM \parallel KC$. Аналогично можно доказать, что $BK \parallel MD$. Значит, $KLMN$ – параллелограмм.
Так как $\angle a_1 = \angle a_3$, то ΔABM – равнобедренный. Отрезок BL – биссектриса, а также и высота ΔABM, т. е. $BL \perp AM$. Отсюда $KLMN$ – прямоугольник (т. к. $\angle MLK = 90°$).
Рассмотрим ΔAMD: $\angle MAD = \angle MDA = 45°$ (т. к. AM и MD – биссектрисы $\angle A$ и $\angle D$). Поэтому ΔAMD – равнобедренный и

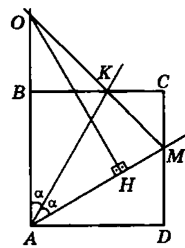
$AM = MD$. Имеем: $\Delta ABL = \Delta CDN$ (по стороне и двум углам, прилежащим к ней). Значит, $AL = DN$ и $LM = AM - AL = DM - DN = MN$. Так как в прямоугольнике $KLMN$ сторона $LM = MN$, то $KLMN$ – квадрат.

822. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма $ABCD$, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 180° - \alpha$, в ΔAO_1O_4 $\angle A = \alpha + 45° + 45° = 90° + \alpha$, в ΔBO_1O_2 $\angle B = 360° - (180° - \alpha) - 45° - 45° = 90° + \alpha$, $\Delta AO_1O_4 = \Delta BO_1O_2$ по углу и прилежащим к нему сторонам, аналогично $\Delta BO_1O_2 = \Delta CO_3O_2 = \Delta DO_3O_4$,



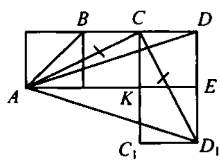
откуда $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_1O_4$, значит, $O_1O_2O_3O_4$ – ромб. По той же причине $\angle AO_1O_4 = \angle BO_1O_2$, следовательно, $\angle O_4O_1O_2 = \angle AO_1B - \angle AO_1O_4 + \angle BO_1O_2 = \angle AO_1B = 90°$ и $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат.

823. Произведем дополнительные построения. На луче AB отложим отрезок $AO = AM$. Соединим точки O и M. Проведем высоту OH в ΔAOM. Имеем: $\angle OAK = \angle KAM = \angle\alpha$ (по условию), $\Delta AHO = \Delta MDA$ по гипотенузе $AO = AM$ (по построению). $\angle OAH = 2\alpha$, $\angle OAH = \angle DMA$ (как накрест лежащие). Отсюда $AH = MD$ и $AD = OH$. Прямоугольный $\Delta ABK = \Delta AKM$ (по катету и острому углу). $OH = AD = AB$. $\angle BKA = 90° - \alpha$;



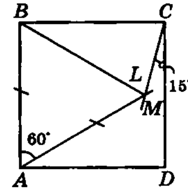
$$\angle AMO = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha;$$ поэтому $\angle BKA = \angle AMO$. Отсюда $BK = HM$. Итак: $AM = AH + HM = BK + DM$.

824. Если C_1 и D_1 симметричны C и D относительно AE, то $\Delta AKC = \Delta CC_1D_1$, откуда $AC = CD_1$. Пусть $\angle BAE = \alpha$, $\angle CAE = \beta$, $\angle DAE = \gamma$. Тогда $\angle ACD_1 = \angle ACK + \angle C_1CD_1 = (90° - \beta) + \beta = 90°$.



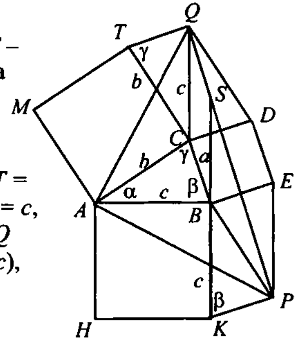
Так как $\angle CAD_1 = \beta + \gamma$ и $\angle CAD_1 = \angle CD_1A = 45°$, то $\beta + \gamma = 45°$, $\alpha + \beta + \gamma = 45° + 45° = 90°$.

825. Проведем дополнительное построение. На луче AM отложим отрезок $AL = AB$. Надо доказать, что точки L и M совпадают. Рассмотрим ΔABL $AB = AL$ (по построению); $\angle BAM = 60°$, значит ΔABL – равносторонний, т. е. $AB = AL = BL$. Так как $AB = BC$, то ΔBLC – равнобедренный, т. е. $BL = BC$, $\angle LBC = 90° - 60° = 30°$.

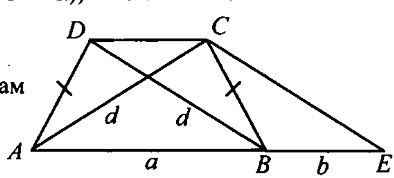


$\angle BCL = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. Отсюда $\angle MCD = 15°$ (что дано и в условии). Значит, $\angle MCD = \angle LCD = 15°$. Отсюда следует, что точки L и M совпадают, а следовательно, $\angle MBC = \angle LBC = 30°$.

826. Пусть в ΔABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, S – точка пересечения KB и PQ. Тогда $\angle BKP = \angle SBE = \angle CBE -$ $- \angle CBS = 90° - (90° - p) = \beta$; $\Delta BKP = \Delta ABC$ (по углу β и сторонам a и с), аналогично $\Delta CQT =$ $= \Delta ABC$, откуда $BP = CT = b$, $CQ = c$, $\angle KBP = \angle TCQ = a$. $\Delta ABP = \Delta ACQ$ (по углу $(90° + \alpha)$ и сторонам b и c), следовательно, $AP = AQ$.
$\angle PAQ = \alpha + \angle PAB + \angle CAQ =$
$= \alpha + \angle PAB + \angle APB = \alpha + (180° -$
$- \angle ABP) = \alpha + (180° - (90° + \alpha)) = 90°$.



827. Пусть a, b – основания трапеции, d – диагональ. Строим ΔACE по сторонам $AE = a + b$, $AC = EC = d$, затем на луче AE откладываем отрезок $AB = a$ и строим ΔACD по сторонам $AC = d$, $DC = b$, $AD = CB$. Трапеция $ABCD$ – искомая.



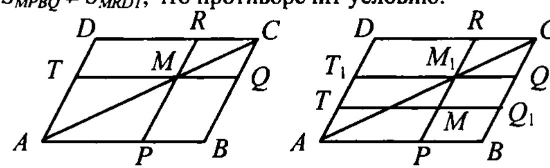
828. Если бы ось симметрии треугольника не пересекала ни одну из сторон, то ему был бы симметричен треугольник, лежащий по другую сторону от оси, то есть другой треугольник. Пусть ось пересекает сторону AB данного ΔABC в некоторой точке M; вершины A и B должны быть симметричны, следовательно, ось перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину. Другие две стороны симметричны относительно этой оси, и поэтому их общая вершина C лежит на ней. Тогда $AC =$ $= BC$ (треугольник – равнобедренный). Если есть другая ось симметрии, то она пересекает другую сторону, например, AC (иначе она совпадает с первой осью), но тогда $AB = CB$ и, значит, $AC = BC = AB$ (треугольник – равносторонний).

Задачи к главе VI

829. Если $M \in AC$, то $S_{MPBQ} = S_{ABC} - S_{APM} - S_{MQC} = S_{ADC} - S_{ADC} -$ $- S_{ATM} - S_{MRC} = S_{MPDT}$. Пусть $S_{MPBQ} = S_{MRDT}$, но $M \notin AC$, $M_1 = AC \cap PR$, $T_1Q_1 \parallel AB$, $M_1 \in T_1Q_1$. Тогда $S_{M_1Q_1BP} = S_{M_1RDT_1}$, но

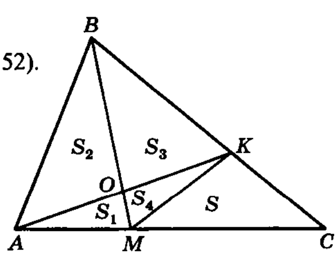
$S_{MQBP} < S_{M_1Q_1BP}$ и $S_{MRDT} > S_{M_1RDT_1}$, следовательно,

$S_{MPBQ} \neq S_{MRDT}$, что противоречит условию.



830. $BK : KC = S_{\Delta BMK} : S_{\Delta CMK} =$ $= S_{\Delta BAK} : S_{\Delta CAK}$ (следствие 2, п. 52). Пусть $S_{\Delta MKC} = S$, $S_{\Delta MOK} = S_4$, тогда: $(S_3 + S_4) : S = (S_2 + S_3) :$ $: (S_1 + S_4 + S)$. (2)

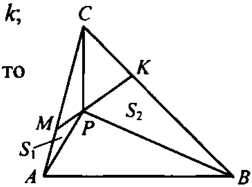
S_4 можно выразить, применив еще раз следствие 2, п. 52.



$MO : OB = S_1 : S_2 = S_4 : S_3$, откуда $S_4 = \dfrac{S_1 \cdot S_3}{S_2}$. (1)

Подставляя выражение (1) в выражение (2) и проводя преобразования, получим: $S=\dfrac{S_1S_3\left(S_1+S_2\right)\left(S_2+S_3\right)}{\left(S_2^2-S_1S_3\right)S_2}$.

831. По условию $AM/MC = CK/KB = MP/PK = k$; так как $S_1/S_{CMP} = AM/MC$, $S_{CPK}/S_2 = CK/KB$ и $S_{CMP}/S_{CPK} = MP/PK$, то $S_{CMP}=\sqrt[3]{S_1^2S_2}$, $S_{CPK}=\sqrt[3]{S_1S_2^2}$, следовательно $S_{MKC} = S_{CMP} + S_{CPK} =$ $=\sqrt[3]{S_1S_2}\left(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}\right)$, $k=\sqrt[3]{S_1/S_2}$ (1)

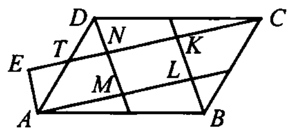


$$\frac{S_{ABC}}{S_{MKC}}=\frac{AC\cdot BC}{MC\cdot CK}=\frac{(AM+MC)(CK+KB)}{MC\cdot CK}=$$

$$=\left(\frac{AM}{MC}+1\right)\left(1+\frac{KB}{CK}\right)=(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right),\text{ отсюда } S_{ABC}=\frac{(k+1)^2}{k^2}S_{MKC}.$$

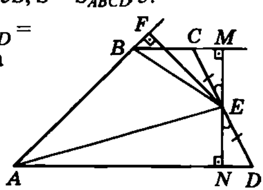
Подставляя сюда значения (1), получим $S=\left(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}\right)^3$.

832. Так как $DR = BP$ и $DR \parallel BP$, то $PBRD$ – параллелограмм, $DP \parallel RB$; аналогично $TC \parallel AQ$ и $MNKL$ – параллелограмм; положим $S_{MNKL} = S$. Пусть $AE \parallel NP$, тогда равны параллелограммы $AENM$ и $MNKL$, а также ΔAET и ΔDNT следовательно, $S_{ADM} = S$, аналогично $S_{DNC} = S_{BKC} = S_{ABL} = S$, отсюда $S_{ABCD} = 5S$, $S = S_{ABCD}/5$.



833. По условию: $CE = ED$; $EF \perp AB$. $S_{ABCD} =$ $= S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BCE} + S_{\Delta AED}$. MN – высота трапеции. $S_{\Delta AED}=\dfrac{1}{2}AD\cdot EN$;

$S_{\Delta BCE}=\dfrac{1}{2}BC\cdot EM$. Кроме того



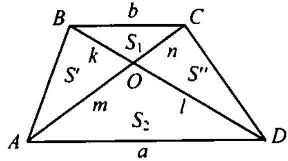
учтем, что $EN = EM$ (т. к. $\Delta CME = \Delta NED$ по гипотенузе и острому углу). $S_{\Delta ABE}=\dfrac{1}{2}AB\cdot EF$. Теперь находим:

$$S_{\Delta AED} + S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}AD \cdot EN + \frac{1}{2}BC \cdot EN = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot$$

$$EN = \frac{1}{2}S_{ABCD}; S_{ABCD} = S_{\Delta ABE} + \frac{1}{2}S_{ABCD}; S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot EF.$$

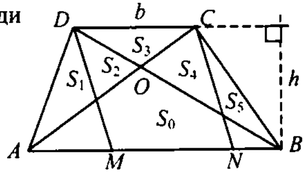
Тогда $S_{ABCD} = AB \cdot EF$, что и требовалось доказать.

834. Введем обозначения: $AD = a$, $BC = b$, $AO = m$, OC, $OB = k$, $OD = l$, $S_{AOB} = S'$, $S_{DOC} = S''$. Тогда $S_1/S_2 = bn/am = bk/cd$, откуда $n/m = k/l$ (1); $S'/S_1 = m/n$, $S'/S_2 = k/l$, откуда $(S')^2/(S_1S_2) = mk/nl = 1$ согласно (1). Следовательно, $S' = \sqrt{S_1S_2}$, аналогично $S'' = \sqrt{S_1S_2}$.



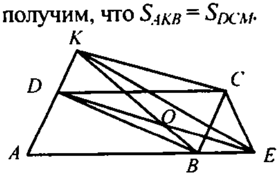
Тогда $S = S_1 + S' + S'' + S_2 = S_1 + 2\sqrt{S_1S_2} + S_2 = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

835. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 – площади частей трапеции, h – ее высота, $MD \parallel NC$. $S_{MDCN} = DC \cdot h$, $S_{ADC} = DC \cdot h/2$, $S_{BDC} = DC \cdot h/2$, следовательно, $S_{MDCN} = S_{ADC} + S_{BDC}$, откуда $S_0 + S_2 + S_3 + S_4 = (S_1 + S_2 + S_3) + (S_3 + S_4 + S_5)$, $S_0 = S_1 + S_3 + S_5$.

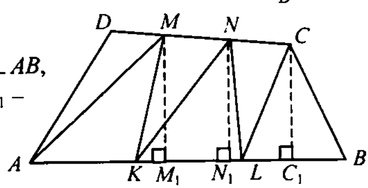


836. Если P и Q – середины диагоналей, то $S_{AQK} = S_{QKC}$ и $S_{MQC} = S_{QKC}$, откуда $S_{AQK} = S_{MQC}$, а значит, $S_{AKM} = S_{CKM}$ (1), аналогично $S_{BKM} = S_{DMK}$. Складывая равенства (1) и (2), получим, что $S_{AKB} = S_{DCM}$.

837. $S_{ABOD} + S_{BDK} - S_{ODK}$, $S_{CEOK} = S_{EDC} + S_{CDK} - S_{ODK}$; но $S_{ABD} = S_{EDC}$ ($AB = DC$, $AB \parallel DC$) и $S_{BDK} = S_{CDK}$, значит $S_{ABOD} = S_{CEOK}$.

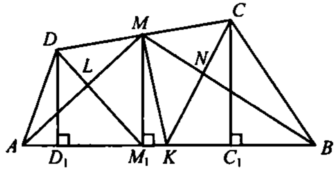


838. По условию $AK = KL = LB$, $DM = MN = NC$. Если $MM_1 \perp AB$, $NN_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$, то NN_1 – средняя линия трапеции M_1MCC_1 и, следова-

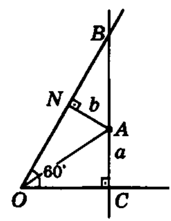


тельно, $NN_1 = (MM_1 + CC_1)/2$. Отсюда $S_{KLN} = (S_{AKM} + S_{LBC})/2$, аналогично $S_{MNK} = (S_{DMA} + S_{NCL})/2$. Тогда $S_{KLN} + S_{MNK} = (S_{AKM} + S_{LBC} + S_{DMA} + S_{NCL})/2$, или $S_{KLNM} = (S_{ABCD} - S_{KLNM})/2$, откуда $S_{KLNM} = S_{ABCD}/3$.

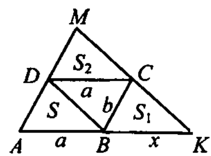
839. Если $MM_1 \parallel AB$, $DD_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$, то MM_1 – средняя линия трапеции D_1DCC_1 и, следовательно, $MM_1 = (DD_1 + CC_1)/2$, отсюда $S_{ADK} + S_{BCK} - AK \cdot DD_1/2 + KB \cdot CC_1/2 = AK\,(DD_1 + CC_1)/2 = AK \cdot MM_1 = AB \cdot MM_1/2 = S_{ABM}$, значит, $S_{ADL} + S_{BCN} = (S_{ADK} - S_{ALK}) + (S_{BCK} - S_{KNB}) = S_{ABM} - S_{ALK} - S_{KNB} = S_{LMNK}$.



840. Сделаем дополнительные построения: $\angle O = 60°$; $AN \perp OB$ и $AC \perp OC$ (по условию); $AN = b$; $AC = a$.
Рассмотрим ΔOBC. $\angle O = 60°$, значит, $\angle B = 30°$. $OB = 2OC$. Рассмотрим прямоугольный ΔANB. $\angle B = 30°$, значит, $AB = 2AN$; $AB = 2b$; $BC = a + 2b$. Тогда $OC^2 = OB^2 - BC^2$ или $OC^2 = 4OC^2 - (a + 2b)^2$, откуда $OC^2 = \dfrac{(a+2b)^2}{3}$ (по теореме Пифагора). Из ΔOAC получаем: $OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = 2\sqrt{\dfrac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.

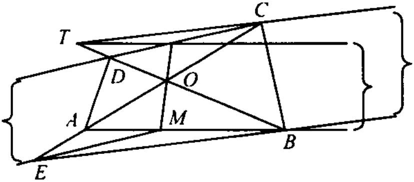


841. Положим $AB = a$, $AD = b$, $BK = x$, $DM = y$, $S_{ABD} = S$. Тогда $S_{AMK}/S = (a + x)(b + y)/(ab)$ (1), $S_1/S = (bx)/(ab)$, $S_2S = (ay)/(ab)$, откуда $x = aS_1/S$, $y = bS_2/S$; $S_{AMK} = 2S + S_1 + S_2$. Подставляя эти значения в (1), получим $S = \sqrt{S_1S_2}$, $S_{ABCD} = 2\sqrt{S_1S_2}$.

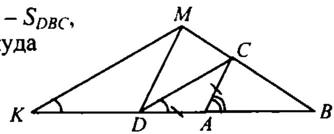


842. Так как $TK \mid AB$, то $S_{TMB} = S_{KMB}$, откуда $S_{TMO} = S_{KBO}$ и, значит, $OT/OB = OK/OM$, и обратно, то есть $TK \parallel AB \Leftrightarrow OT/OB = OK/OM$ (1). Аналогично, $ME \parallel CD \Leftrightarrow OK/OM = OC/OE$ (2). Отсюда следует $OT/OB = OC/OE$ (3). Аналогично соотноше-

ниям (1) и (2) справедливо соотношение $BE \parallel CT \Leftrightarrow OT/OB =$
$= OC/OE$. Так как верно (3), то $BE \parallel CT$.

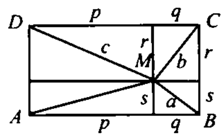


843. $S_{CDK} = S_{BCK} - S_{DBC}$, $S_{DCM} = S_{BDM} - S_{DBC}$, следовательно $S_{DCK} = S_{DCK}$, откуда $KM \parallel DC$. Так как $AD = AC$, то $\angle ACD = \angle ADC = a/2$, а так как $KM \parallel DC$, то $\angle BKM = \alpha/2$.

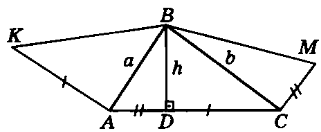


844. Проведем через точку M прямые, параллельные сторонам, и обозначим отрезки сторон через p, q, r, s. Тогда $a^2 = s^2 + q^2$, $c^2 = p^2 + r^2$, $b^2 = r^2 + q^2$, откуда $a^2 + c^2 - b^2 - s^2 + p^2 = AM^2$,

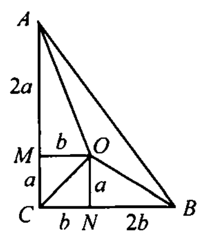
$AM = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.



845. Для упрощения задачи введем дополнительные обозначения: $AB = a$; $DC = b$; $BD = h$. По теореме Пифагора из прямоугольного ΔAKB получаем: $KB^2 = AK^2 + AB^2 = DC^2 + a^2$. Из ΔBDC получаем: $DC^2 = b^2 - h^2$, отсюда $KB^2 = b^2 - h^2 + a^2$. Аналогично находим $BM^2 = BC^2 + CM^2 = b^2 + a^2 - h^2$. Отсюда следует, что $BM^2 = KB^2$ или $BM = KB$, ч.т.д.

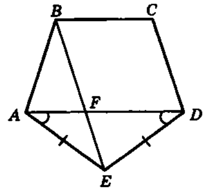


846. Проведем $OM \perp AC$, $ON \perp BC$ и положим $CM = a$, $CN = b$. По условию $S_{OCB} = S_{ABC}/3$, $CB \cdot a/2 = CB \cdot AC/6$, $a = AC/3$, $AM = 2a$. Аналогично $NB = 2b$. Из ΔAMO, ΔBNO и ΔCON
$OA^2 + OB^2 = (b^2 + 4a^2) + (a^2 + 4b^2) =$
$= 5(a^2 + b^2) = 5OC^2$.



Задачи к главе VII

847. **а)** Рассмотрим ΔABE и ΔAED: $AB = ED$; $\angle E = \angle A$ (по условию), AE – общая сторона. $\Delta ABE = \Delta AED$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\angle DAE = \angle ADE$. Рассмотрим ΔAFE и ΔAED. Они подобны (по двум углам).



б) $\Delta AFE \sim \Delta AED$: $\dfrac{DA}{AE} = \dfrac{AE}{AF}$.

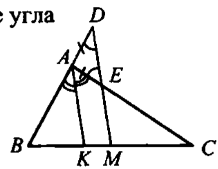
$\angle AED = \angle AFE = \dfrac{180 \cdot (5-2)}{5} = 108°$, $\angle DFE = 180° -$

$- 108° = 72°$, $\angle ADE = \dfrac{180° - \angle AED}{2} = 36°$, $\angle FED =$

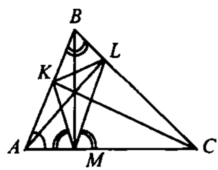
$= 180° - (36° + 72°) = 72°$. Отсюда следует, что $DF = DE = AE$.

Тогда получаем: $\dfrac{DA}{AE} = \dfrac{AE}{AF}$ или $\dfrac{DA}{DF} = \dfrac{DF}{AF}$, ч.т.д.

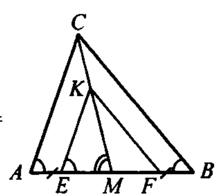
848. Пусть $AC > AB$. По теореме о биссектрисе угла (№ 535) $KC > BK$ и M лежит между K и C. По теореме об угле, пересеченном параллельными прямыми (№ 556), $BD/BM = AD/KM$, $CE/MC = AE/KM$ (1). Но по условию $BM = MC$, а в ΔAED $\angle E = \angle D$ и, следовательно, $AD = AE$; тогда из (1) $BD = CE$, ч.т.д.



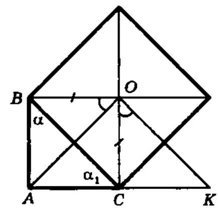
849. Если AL, BM, CK – высоты в ΔABC, то ΔABM подобен ΔAKC, откуда $AB/AC = AM/AK$, но тогда ΔAKM подобен ΔABC и, значит, $\angle AMK = \angle ABC$, $\angle KMB = 90° - \angle ABC$. Аналогично, $\angle BML = 90° - \angle ABC$. Следовательно, MB – биссектриса угла $\angle KML$.



850. Пусть M – точка пересечения AB и CK. ΔEKM подобен ΔACM, $EM/AM = KM/CM$, $(AM - AE)/AM = KM/CM$, ΔFKM подобен ΔBCM, $MF/BM = KM/CM$, $(BM - BF)/BM = KM/CM$, отсюда $1 - AE/AM = 1 - BF/BM$, а так как $AE = BF$, то $AM = BM$.

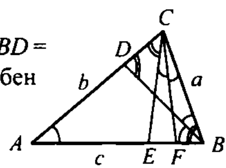


851. ΔABC – данный, BC – гипотенуза, равная стороне квадрата, $AB + AC = a$. Надо найти AO. Сделаем дополнительное построение: $\angle BOA = \angle COK$. Рассмотрим ΔABO и ΔCOK. $BO = OC$ (как половины диагоналей квадрата).



$\angle ABO = \angle\alpha + 45°$; $\angle OCK = 180° -$
$- (\angle\alpha_1 + 45°)$; $\angle\alpha_1 = 90° - \angle\alpha$, тогда
$\angle OCK = 180° - (90° - \angle\alpha + 45°) = \angle\alpha + 45°$. Значит, $\angle ABO = \angle OCK$. Получаем, что $\Delta ABO = \Delta COK$ (по стороне и двум углам, прилежащим к ней). Таким образом, $AO = OK$; $AB = CK$. $AK = AC + CK$ или $AK = AC + AB = a$.
Рассмотрим ΔAOK: $AO = OK$, значит, он равнобедренный. $\angle AOK = \angle COK + \angle AOC = \angle BOA + \angle AOC = 90°$. ΔAOK – прямоугольный. Тогда: $AO = \dfrac{AK}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

852. Если $\angle ACE = \angle BCE = 360°/7$, $\angle ABD = \angle CBD = \angle ECF = \angle BCF = 180°/7$, то ΔABC подобен ΔACE, подобен ΔBDC, подобен ΔCBF, откуда при $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ получим:

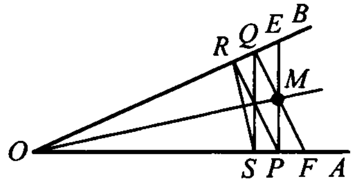


$$\begin{cases} \dfrac{a}{CE} = \dfrac{b}{AE} = \dfrac{c}{a}, & AE = \dfrac{b^2}{c}, BE = CE = \dfrac{ab}{c}, \\ \dfrac{a}{DC} = \dfrac{b}{a}\dfrac{c}{BD}, & AD = BD = \dfrac{ac}{b}, DC = \dfrac{a^2}{b}, \\ \dfrac{FB}{a} = \dfrac{a}{c}, & FB = \dfrac{a^2}{c}, AF = AC = b, \end{cases} \quad \begin{cases} AE + BE = c \\ AD + DC = b, \\ c = AF + FB \end{cases}$$

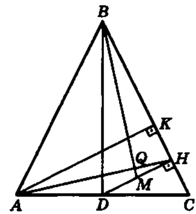
$$\begin{cases} \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{ab}{c} = c, \\ \dfrac{ac}{b} + \dfrac{a^2}{b} = b, \\ c = b + \dfrac{a^2}{c} \end{cases} \quad \dfrac{\begin{cases} b^2 + ab = c^2 \\ ac + a^2 = b^2 + \\ c^2 = bc + a^2 \end{cases}}{ab + ac = bc;} \quad \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a}.$$

Решение с помощью теоремы Птолемея. (№ 893) В четырехугольнике $ABCD$ $BC = a$ – сторона правильного семиугольника, $AC = b$ и $AB = c$ – его диагонали. $AB \times CD = AD \times BC + AC \times BD$; $cb = ca + ba$; $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

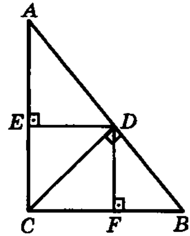
853. В ΔOEF OM проходит через точку пересечения высот EP и FQ, следовательно, $OM \perp EF$ (1). ΔOPR подобен ΔOFQ, $OP/OR = OF/OQ$, $OR \cdot OF = OP \times OQ$, ΔOQS подобен ΔOEP, $OQ/OS = OE/OP$, $OS \cdot OE = OP \cdot OQ$. Следовательно, $OR \times OF = OS \cdot OE$, $OF/OE = OS/OR$ и ΔOEF подобен ΔORS, $\angle OFE = \angle OSK$, $EF \parallel RS$. Тогда из (1) следует $RS \perp OM$.



854. Из вершины A ΔABC проведем высоту AK. Так как $DH \perp BC$ (по условию), то $AK \parallel DH$. $AD = DC$ (по условию), значит, $KH = HC$.
$\Delta BDC \sim \Delta BHD$ ($\angle B$ – общий, треугольники прямоугольные). $\Delta AKC \sim \Delta BDC$ ($\angle C$ – общий, $\angle K = \angle D = 90°$). BM и AH являются медианами. Отсюда $\Delta AKH \sim \Delta BMH$. $\angle KAH = \angle HBM$. AH и BM пересекаются в точке Q. $\angle BHQ = \angle KHA = 90° - \angle KAH = 90° - \angle HBM = 90° - -\angle HBQ$. Значит, $\angle BHQ + \angle HBQ = 90°$, т. е. $BM \perp AH$, ч.т.д.



855. а) $AD^2 = AC \cdot AF$; $CD^2 = AD \cdot BD$; $BD^2 = BC \cdot BF$; $AC \cdot BC = AB \cdot CD$.
Тогда $AD^2 \cdot BD^2 = AC \cdot AE \cdot BC \cdot BF$ или $CD^4 = AC \cdot BC \cdot AE \cdot BF$, но $AC \cdot BC = AB \cdot CD$, поэтому $CD^4 = AB \cdot CD \cdot AE \cdot BF$ или $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$, ч.т.д.
б) $AB^2 = (AD + BD)^2 = AD^2 + BD^2 + 2DC^2$;



$$\left.\begin{array}{l} AD^2 = AE^2 + ED^2 \\ BD^2 = BF^2 + DF^2 \end{array}\right\} \text{ по теореме Пифагора.}$$

Тогда: $AD^2 + BD^2 = AE^2 + ED^2 + BF^2 + DF^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.
$AD^2 = AE^2 + BF^2 + 3CD^2$, что и требовалось доказать.

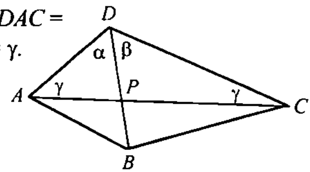
в) $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ (т. к. $\Delta ADE \sim \Delta ABC$); $AC = \dfrac{AD^2}{AE}$, то

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB \cdot AE}{AD^2}$; $AD = \sqrt[3]{AB \cdot AE^2}$. Тогда

$AD + BD = AB = \sqrt[3]{AB \cdot AE^2} + \sqrt[3]{AB \cdot BF^2}$ или

$\sqrt[3]{AB^2} = \sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2}$, что и требовалось доказать.

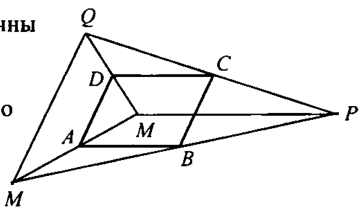
856. **а)** Пусть $\angle ADB = \alpha$, $\angle BDC = \beta$; $\angle DAC = \gamma$; так как $AD = CD$, то $\angle ACD = \gamma$. По условию $\alpha = 1/2 \cdot \beta = 2/3 \cdot \gamma$, откуда $\beta - 2\alpha$, $\gamma = 3/2 \cdot \alpha$. В ΔACD $\alpha + 2\alpha + 3/2 \cdot \alpha = 180°$, следовательно, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$,



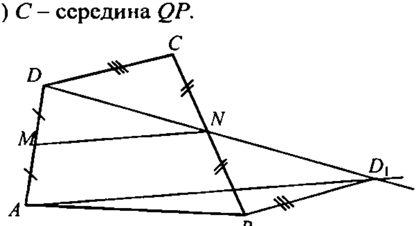
$\gamma = 45°$. Тогда $\angle ADC = \alpha + \beta = 90°$; так как $AB = BD = CD$, то $\angle BAD = \angle ABD = (180° - \alpha)/2 = 75°$; $\angle BCD = \angle CBD = (180° - \beta)/2 = 60°$, $\angle ABC = \angle /ABD + \angle CBD = 75° + 60° = 135°$.

б) Так как $\angle BAP = \angle ADB = 50°$, то $\Delta ABD \sim \Delta PBA$ по двум углам, откуда $AB/BD = BP/AB$ и $AB^2 = BP \cdot BD$.

857. Если точки N и Q симметричны M относительно A и D соответственно, точка P симметрична N относительно B, то по теореме о средней линии треугольника $MP \parallel AB \parallel CD$. Тогда по теореме Фалеса (№ 385) C – середина QP.

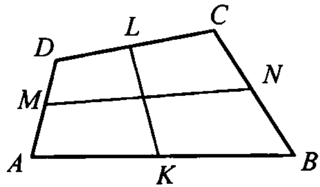


858. Пусть в четырехугольнике AB не параллельно CD, M и N – середины соответственно сторон AD и BC, точка D_1 симметрична D от-



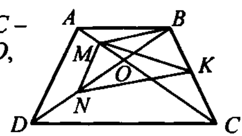
носительно N. Так как AB не параллельно CD, то
$D \notin AB$; из ΔABD_1 $AD_1 < AB + BD_1$ (1). В ΔADD_1 $AD_1 = 2MN$;
так как $\Delta DCN = \Delta D_1BN$, то $BD_1 = DC$.
Тогда из (1) $2MN < AB + DC$, $MN < (AB + DC)/2$.

859. Предположим противное, что четырехугольник $ABCD$ не параллелограмм, то есть AB не параллельно CD, $AD \neq BC$.
По № 858 $(AB + DC)/2 > MN$,
$(AD + BC)/2 > KL$, тогда
$(AB + DC + AD+BC)/2 > MN + KL$,
что противоречит условию.

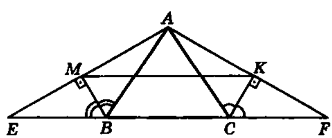


860. $MNPQ$ – выпуклый четырехугольник. MN и PQ – его противоположные стороны. DK – прямая, соединяющая середины сторон MN и PQ. По условию $DK = \frac{1}{2}(MQ + NP)$. Значит, $MQ \parallel NP$. В противном случае данное равенство невыполнимо. Отсюда следует, что $MNPQ$ – трапеция или параллелограмм, что и требовалось доказать.

861. Пусть ΔMNK – искомый. ΔAOB и ΔDOC – равносторонние, следовательно, $MB \perp AO$, $NC \perp DO$. $\Delta AOD = \Delta BOC$, откуда
$AD = BC$, $MN = AD/2 = BC/2 = BK = KC$.
По № 404 в ΔBCM $MK = BK = MN$ и
в ΔBCN $KN = KC = MN$.



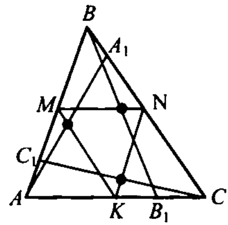
862. Продолжим прямые AM и AK до пересечения с BC. Получим точки E и F. Рассмотрим ΔACF. $CK \perp AF$ (по условию) и $\angle ACK = \angle KCF$. Значит, ΔACF – равнобедренный. $AC = CF$. Аналогично в ΔAEB $AB = EB$. KC и MB – медианы ΔACF и ΔAEB, значит, точки K и M являются серединами сторон AF и AE. Отсюда MK – средняя линия ΔAEF. Тогда



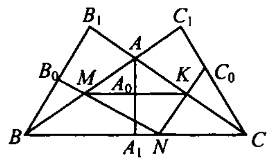
$$MK = \frac{1}{2}EF = (EB + BC + CF) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC).$$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$. Значит, $MK = P_{\Delta ABC}$, ч.т.д.

863. Если MN, MK, KN – средние линии в ΔABC, то $MN \parallel AC$, $MK \parallel BC$, $KN \parallel AB$ и по № 819 середины данных отрезков лежат на сторонах ΔMNK. Если бы эти середины лежали на одной прямой, то эта прямая пересекла бы все три стороны ΔMNK, что невозможно (по аксиоме Паша).

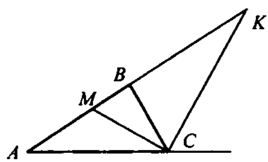


864. Если данный треугольник ABC – остроугольный, то основания его высот лежат внутри сторон, получаем противоречие с № 863. Если в $AABC$ $\angle A$ – тупой, то середина A_0 высоты AA_1 лежит на стороне треугольника MNK, образованного средними линиями. Если бы середины A_0, B_0, C_0 высот лежали на одной прямой, то эта прямая, пересекающая сторону MK ΔMNK, пересекала бы его стороны KN или NM в точках B_0 и C_0, но эти точки лежат на их продолжениях. Следовательно, ΔABC – прямоугольный.



865. Так как $BC = 2AC$, то по теоремам о биссектрисах (№ 535, 619) $AM = 2MB$, $AK = 2BK$, откуда $BK = AB = 3MB$, $MB = AM/2 =$ $= AB/3 = MK/4$.

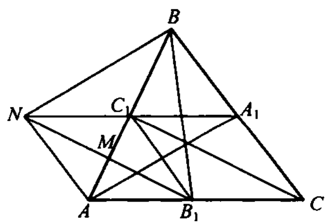
Следовательно, $S_{BCM} = S_{ACM}/2 = S_{ABC}/3 = S_{CMK}/4$.



866. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон ΔABC, C_1 – середина NA_1 M – середина AC_1, тогда AA_1BN и B_1NC_1C – параллелограммы,

$NB - AA_1$, $B_1N = CC_1$

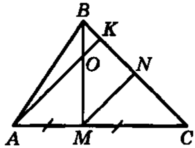
$\Delta NBB_1 = \Delta EFG$ по трем сторонам. $S_{ABB_1} = S_{ABC}/2$,



$$S_{AMB_1} = S_{AC_1C}/4 = S_{ABC}/8;\ S_{MBB_1} = S_{ABB_1} - S_{AMB_1} = 3S_{ABC}/8,$$

$$S_{NBB_1} = 2S_{MBB_1} = 3S_{ABC}/4,$$ значит $S_{EFG}/S_{ABC} = 3/4$.

867. Проведем $MN \parallel AK$. $BO : OM = 1 : 2$ (по условию). Значит, $BK : KN = 1 : 2$ или $KN = 2BK$. Рассмотрим ΔAKC: $MN \parallel AK$ (по построению). Значит, MN – средняя линия ΔAKC. $NC = KN = 2BK$.

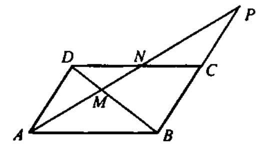


$BC = BK + KN + NC = 5BK$ и $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{1}{5}$.

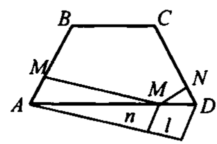
У ΔABC и ΔABK общая высота (из вершины A), поэтому

$$\frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}.$$

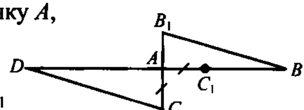
868. ΔMND подобен ΔMAB, откуда $AM/MN = MB/DM$, ΔMAD подобен ΔMBP, откуда $MB/DM = MP/AM$, следовательно, $AM/MN = MP/AM$, $AM^2 = MN \cdot NP$.



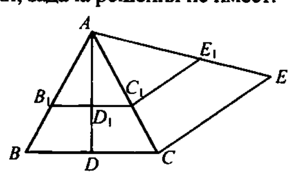
869. Если X – искомая точка, $XM \perp AB$, $XN \perp DC$, то ΔAXM подобен ΔDXN, $AX/XD = XM/XN = n/1$. Точка X делит отрезок AD в данном отношении (№ 584).



870. На прямой, проходящей через точку A, откладываем отрезки $AC_1 = AC$ и $C_1B_1 = CB$, после чего проводим $C_1D \parallel BB_1$. Тогда $AABB_1$ подобен $AADC_1$, откуда $AB/AD = ABSAC_1$, $AB/AD + 1 = AB_1/AC_1 + 1$, $(AB + AD)/AD = (AB_1 + AG)/AC_1$ $DB/AD = C1B1/AC$, D – искомая точка. Если C – середина AB, то $DB = AD$, хотя A и B – различные точки; задача решения не имеет.



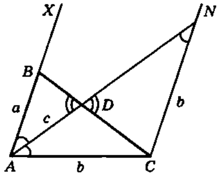
871. Пусть в ΔABC $AB = AC$, $AD \perp BC$, $\angle A = \alpha$, $BC + AD = s$. Строим равнобедренный ΔAB_1C_1 с углом $A = \alpha$ и высотой AD_1. На луче с вершиной A откладываем отрезки $AE_1 = B_1C_1 + AD_1$ и $AE = s$, проводим $EC \parallel E_1C_1$ $CB \parallel C_1B_1$.



872. __Анализ__. Даны отрезки a, b и c, равные AB, AC и AD соответственно, где AD – биссектриса $\angle A$. $CN \parallel AB$. ΔANC – равнобедренный, где $AC = CN = b$.

$\Delta ABD \sim \Delta NCD$:

$$\frac{DN}{AD} = \frac{CN}{AB};\ DN = \frac{AD \cdot CN}{AB},\ \text{т. е. } DN = \frac{c \cdot b}{a}.$$



__Построение__. Строим ΔANC по трем сторонам ($AC = CN = b$, $AN = \dfrac{c \cdot b}{a} + c$). Откладываем луч AX так, что $\angle XAN = \angle NAC$, отмечаем на луче AX точку B, чтобы $AB = a$. ΔABC – искомый.

__Доказательство__. Из подобия треугольников ABD и NCD:

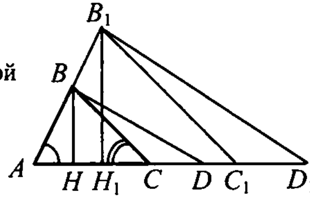
$$\frac{AB}{CN} = \frac{AD}{ND};\ AD = \frac{AB \cdot ND}{CN} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c \cdot b}{a} = c.$$

AD – биссектриса ΔABC. $AB = a$, $AC = b$ (по построению).

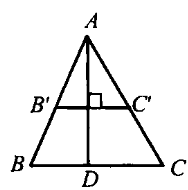
__Исследование__. Если можно построить ΔANC, то можно построить искомый треугольник. Тогда построение возможно в случае: $AN < AC + CN$. $c + \dfrac{c \cdot b}{a} < 2b$ или $c < \dfrac{2ba}{a+b}$.

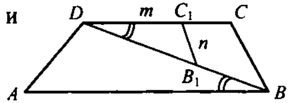
Если $c \geq \dfrac{2ba}{a+b}$, то решений нет; если $c < \dfrac{2ba}{a+b}$, то решение одно.

873. Пусть в ΔABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $BH + AC = s$. Строим ΔAB_1C_1 с углами $\angle A = \alpha$, $\angle C_1 = \gamma$ и высотой B_1H_1. На луче AC откладываем отрезки $AD_1 = B_1H_1 + AC_1$ и $AD = s$, проводим $DB \parallel D_1B_1$, $CB \parallel C_1B_1$.



874. Пусть a, b, c – стороны треугольника, h_a, h_b, h_c – проведенные к ним высоты. S – площадь; тогда $a = 2S/h_a$, $b = 2S/h_b$, $c = 2Slh_c$, $a : b : c = a = 1/h_a : 1/h_b : 1/h_c$. Строим отрезок $c' = h_a h_b/h_c$, пользуясь тем, что $h_c/h_a = h_b/c'$, строим $\Delta AB'C'$ по сторонам $B'C' = h_b$, $AC' = h_a$, $AB' = c'$ и строим ΔABC : $AD \perp B'C$, $AD = h_a$, $CB \parallel C'B'$, $D \notin BC$.

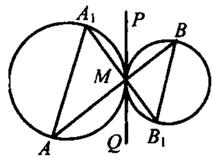




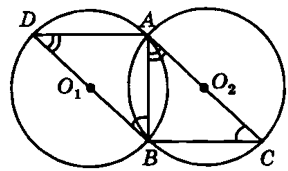
875. Строим ΔABD по сторонам AB, AD и углу A. Строим ΔDB_1C_1 по углу $\angle B_1DC_1 = \angle ABD$ и сторонам $DC_1 = m$; $B_1C_1 = n$ (может быть одно, два или ни одного решения). Проводим $CB \parallel C_1B_1$.

876. Пусть a – сторона квадрата, p и q – диагонали ромба. По условию и согласно № 476 $pq/2 = a^2$, $p/q = m/n$, отсюда $p = qm/n$, $q = \sqrt{2a^2n/m}$. Сначала строим отрезок $k = 2a^2/m$, пользуясь тем, что $m/a = 2a/k$ (№ 556), затем строим отрезок $q = \sqrt{nk}$, используя №№ 668, 669 и отрезок p, пользуясь тем, что $n/q = m/p$ (№ 556). Наконец, строим ромб по его диагоналям p и q, пользуясь теоремой из параграфа 46.

Задачи к главе VIII



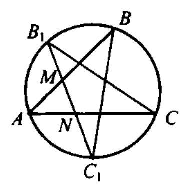
877. Пусть PQ – общая касательная. Тогда по №664 $\angle A = \cup A_1M/2 = \angle A_1MP =$ $= \angle B_1MQ = \cup MB_1/2 = \angle B$, но из $\angle A = \angle B$ следует, что $AA_1 \parallel BB_1$.



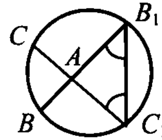
878. а) $\angle ADB = \dfrac{\cup AB}{2}$; $\angle BAC = \dfrac{\cup AB}{2}$ (как угол между хордой AB и касательной AC). Поэтому $\angle ADB = \angle BAC$. Аналогично $\angle DBA = \angle ACB$. $\Delta ADB \sim \Delta ABC$. Значит, $\angle DAB = \angle ABC$. Эти углы – накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AB. Значит, $AD \parallel BC$, ч.т.д.

б) $\Delta ABC \sim \Delta ABD$, тогда справедливо равенство: $AB : BC = AD : AB$; $AB^2 = AD \cdot BC$, ч.т.д.

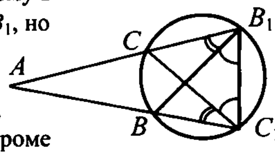
в) $\Delta ABC \sim \Delta ABD$. Получаем два равенства: $BD : AC = AB : BC$; $BD : AC = AD : AB$. Умножим их: $BD^2 : AC^2 = (AB : BC)(AD : AB) =$ $= AD : BC$, т. е. $BD^2 : AC^2 = AD : BC$, ч.т.д.



879. В ΔNB_1C внешний $\angle ANB_1 = \angle B_1 + \angle C_1$, аналогично $\angle AMC_1 = \angle B + \angle C_1$, $\angle B_1 = \angle B = \cup CC_1/2 = (\cup AC/2)/2 = \cup AC/4$, $\angle C = \angle C_1 = \cup AB/4$. Поэтому в ΔAMN $\angle ANB_1 = \angle AMC_1$, следовательно, $AM = AN$.

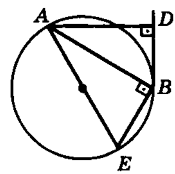


880. Пусть точка A пересечения прямых BB_1 и CC_1 лежит внутри круга. Так как $BB_1 = CC_1$, то $\cup BC_1B_1 = \cup CB_1C_1$, но $\cup BC_1 = \cup BC_1B_1 - \cup C_1B_1$ и $\cup B_1C = \cup C_1B_1C - \cup C_1B_1$, следовательно, $\cup BC_1 = \cup B_1C$. Поэтому в ΔAB_1C_1 $\angle B_1 = \angle C_1$, откуда $AC_1 = AB_1$, но тогда также и $AC = AB$.



Пусть A лежит вне круга.
Так как $BB_1 = CC_1$, то $\cup BB_1 = \cup CC_1$, следовательно, $\angle BC_1B_1 = \angle C_1B_1C$, кроме того, $\angle CC_1B = \angle BB_1C$, значит, в ΔAB_1C_1 $\angle AC_1B_1 = \angle AB_1C_1$, откуда $AC_1 = AB_1$, но тогда также и $AC = AB$.

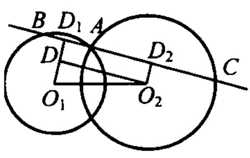
881. Проведем диаметр AE окружности. Рассмотрим ΔABE и ΔABD; $\angle B = \angle D = 90°$.



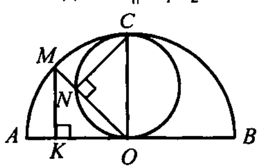
$\angle AEB = \angle ABD = \dfrac{\cup AB}{2}$ (задача 878).

$\Delta ABE \sim \Delta ABD$ и справедливо равенство:

$AE : AB = AB : AD$; $\dfrac{AB^2}{AD} = AE$. Поэтому для всех хорд AB величина $\dfrac{AB^2}{AD}$ имеет одно значение, равное диаметру окружности, ч.т.д.

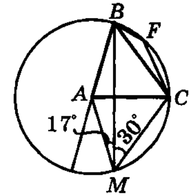


882. Если $O_1D_1 \perp BC$, $O_2D_2 \perp BC$, $O_2D \perp O_1D_1$, то $D_1D_2 = D_1A + AD_2 = AB/2 + AC/2 = BC/2$. Следовательно, $BC = 2D_1D_2 = 2O_2D$, но $O_2D \le O_1O_2$. Поэтому BC будет наименьшим, если O_2D совпадет с O_1O_2, но тогда $BC \parallel O_1O_2$.



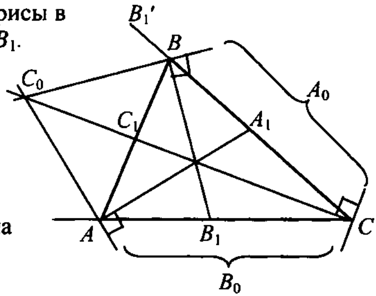
883. Пусть радиус $OC \perp AB$, N – точка пересечения OM и окружности с диаметром OC, $MK \perp AB$. Тогда $OM = OC$, $\angle K = \angle N = 90°$, $\angle KMO = 90° - \angle KOM = \angle COM$; поэтому $\Delta KMO = \Delta NOC$ и $ON = MK$.
Обратно, если на OM отложить от O отрезок $ON_1 = MK$, то $\Delta KMO = \Delta N_1OC$ по 1-му признаку, $\angle OCN_1 = \angle KOM = \angle OCN$ и N совпадет с N_1.

884. Сделаем дополнительное построение. Проведем окружность радиусом AB и центром в точке A. $\angle ABC = 60°$ (т. к. ΔABC равносторонний), $\angle BMC = 30°$ – по условию. Значит, $\cup BC = 60°$. На $\cup BC$ возьмем произвольную точку F. $\angle BFC$ опирается на дугу BC. $\cup BC = 360° - 60° = 300°$ и $\angle BFC = 150°$.

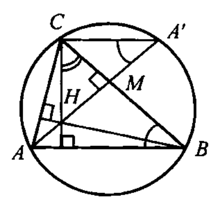


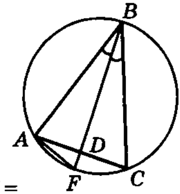
Сумма противоположных углов четырехугольника $MBFC$ равна 180°. Значит, $\angle MBC + \angle BCM = 180°$. Через точки B и F проходит только одна окружность с центром в точке A и радиусом AB. Значит, точка M лежит на окружности.
Рассмотрим ΔABM: $AB = AM = r$. ΔAMB – равнобедренный: $\angle AMB = \angle ABM = 17°$. $\angle BAM = 180° - (17° + 17°) = 146°$.
Сумма углов четырехугольника $ABCM$ равна 360°.
$\angle BCM = 360° - 146° - 30° - 17° - 60° = 107°$.

885. Пусть AA_1 и BB_1 – биссектрисы в ΔABC, $AC_0 \perp AA_1$, $BC_0 \perp BB_1$. Тогда $\angle BAC_0$ – $90° -$ $- (\angle A)/2$, $\angle A_1'AC_0 =$ $= 180° - \angle A - (90° -$ $- (\angle A)/2) = 90° - (\angle A)/2$. Значит, AC_0 – биссектриса внешнего угла в ΔABC и точка C_0 одинаково удалена от его сторон AA_1' и AB. Аналогично C_0 одинаково удалена от BB_1' и AB. Следовательно, C_0 одинаково удалена от AA_1' и BB_1', то есть от CA и CB, поэтому C_0 лежит на биссектрисе угла C. Для остальных биссектрис доказательство аналогично.

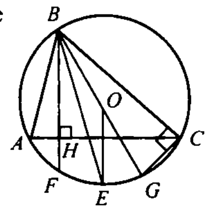


886. Если M – точка пересечения BC и HA', то $\Delta A'MC = \Delta HMC$, откуда $\angle A'$ – $\angle CHA'$, но $\angle CHA' = 90° - \angle HCB = AABC$. Следовательно, $\angle A'$ – $\angle ABC$, значит, A' лежит на описанной около ΔABC окружности (сравните с № 884). Для B' и C' доказательство аналогично.

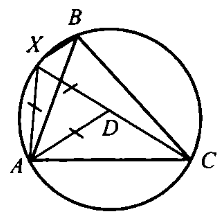




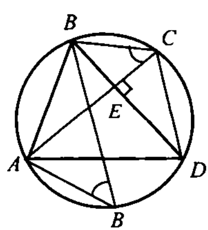
887. Около ΔABC опишем окружность. BD пересекает эту окружность в точке F. $\angle BFA$ и $\angle BCA$ опираются на одну и ту же дугу AB, значит, они равны. $\angle ABF = \angle DBC$ (по условию). $\Delta ABF \sim \Delta DBC$. Имеем: $AB : BD = (BD + DF) : BC$, откуда получаем: $BD^2 + BD \cdot DF = AB \cdot BC$. Учтем, что $BD \cdot DF = AD \cdot DC$ (по теореме о пересекающихся хордах). Тогда: $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$, ч.т.д.



888. Биссектриса BE и перпендикуляр к стороне AC, проходящий через ее середину, пересекают дугу AC в одной точке – ее середине E, следовательно, $\cup AE = \cup EC$ (1). Если G – пересечение BO с окружностью, то $\angle ABF = 90° - \angle A = 90° - \cup BC/2$, $\angle CBG = 90° - \angle BGC = 90° - \cup BC/2$, откуда $\angle ABF = \angle CBG$, и $\cup AF = \cup GC$ (2). Вычитая (2) и (1), имеем: $\cup FE = \cup EG$, $\angle FBE = \angle GBE$.

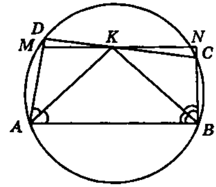


889. Пусть, например, $XC > XA$, $XC > XB$. Отложим $XD = XA$ на XC. Поскольку $\angle AXC = \angle ABC = 60°$ как опирающиеся на $\cup AC$, то ΔAXD – равносторонний: $XD = XA = AD$. Так как еще и $\angle XAB = 60° - \angle BAD = \angle CAD$, $\angle ABX = \angle ACX$ как опирающиеся на $\cup AX$, то $\Delta XAB = \Delta DAC$ и $DC = XB$. Тогда $XC = XD + DC - XA + XB$.



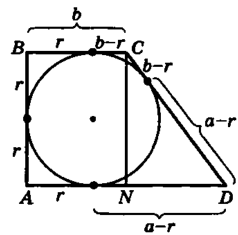
890. По условию $AC \perp BD$. Если BB_1 – диаметр, то $\angle AB_1B = \angle ACB$ как опирающиеся на $\cup AB$. Пусть E – точка пересечения AC и BD. Так как $\angle ABB_1 = 90° - \angle AB_1B$ и $\angle DBC = 90° - \angle ACB$ из прямоугольных ΔABB_1 и ΔECB, то $\angle ABB_1 = \angle DBC$ и, следовательно, $\cup AB_1 = \cup DC$, $AB_1 = DC$. Из ΔABB_1 $DC^2 + AB^2 = AB_1{}^2 + AB^2 = BB_1{}^2$.

891. AK – биссектриса $\angle A$, BK – биссектриса $\angle B$. Точка K – точка пересечения биссектрис. Проведем $MN \parallel AB$ через точку K. Рассмотрим ΔDKM и ΔNKC. Углы при вершине K в этих треугольниках равны как вертикальные.



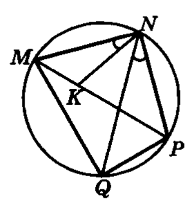
$\angle A + \angle C = 180°$ (т. к. $ABCD$ – вписанный четырехугольник). $\angle A + \angle M = 180°$ ($AB \parallel MN$). Значит, $\angle C = \angle M$ и $\Delta DKM \sim \Delta NKC$.
Точка K равноудалена от прямых AB и CB, а также от AB и AD. Значит, равноудалена от AD и BC. Отсюда высоты в этих треугольниках, проведенные из вершины K, равны. $\Delta DKM = \Delta NKC$.
$\angle ABK = \angle BKN$ (как накрест лежащие). Значит, в ΔBKN $KN = NB$ (треугольник равнобедренный). Аналогично, $AM = MK$. Отсюда $CD = DK + KC = MK + KN = AM + BN =$ $= AD + BC$. Получим: $CD = AD + BC$, ч.т.д.

892. a и b – основания трапеции, CN – высота трапеции $ABCD$, $CN = 2r$.
$DN = a - b$; $CD = (a - r) + (b - r) = a +$ $+ b - 2r$. По теореме Пифагора в ΔCDN:
$(a - b)^2 + 4r^2 = (a + b - 2r)^2$, откуда
$r = \dfrac{ab}{a+b}$. Значит, радиус вписанной окружности равен . Тогда:



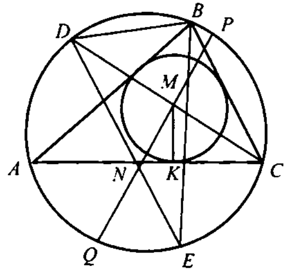
$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{(a+b)}{2} = ab,$$ ч.т.д.

893. $MNPQ$ – данный четырехугольник. MP и NQ – диагонали. Построим $\angle MNK = \angle PNQ$. $\angle NMP = \angle NQP$ (опираются на NP).
$\Delta MNK \sim \Delta QNP$ (по двум углам). Имеем равенство: $MN : NQ = MK : PQ$ или $MN \cdot PQ = NQ \cdot MK$ (1).



$\Delta NPK \sim \Delta MNQ$ (по двум углам). Получаем отношение:
$NP : NQ = KP : MQ$ или $MQ \cdot NP = KP \cdot NQ$ (2).
Сложим (1) и (2). Имеем: $MN \cdot PQ + MQ \cdot NP = NQ \cdot MK + KP \cdot NQ$;
$MN \cdot PQ + MQ \cdot NP = NQ \cdot MP$, ч.т.д.

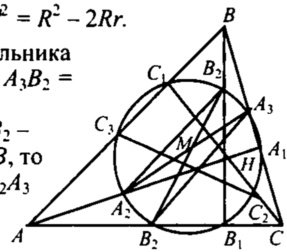
894. Пусть M – центр окружности, вписанной в ΔABC (пересечение его биссектрис), N – центр описанной около него окружности. Продолжим MN до пересечения с описанной окружностью в точках P и Q, проведем через M хорду CD, а затем – диаметр DE описанной окружности.



Тогда $MQ \cdot MP = (R + d)(R - d) = $ $= R^2 - d^2$, а так как по теореме о хордах $MQ \cdot MP = MC \cdot MD$, то $MC \cdot MD = R^2 - d^2$ (1). Поскольку $\angle DAB = \angle DCB = \angle C/2$ и $\angle MAB = \angle A/2$, то $\angle MAD = \angle MAB + \angle DAB = \angle A/2 + \angle C/2$. С другой стороны, для ΔAMC $\angle AMD = \angle MAC + \angle MCA = \angle A/2 + \angle C/2$. Поэтому $\angle MAD = \angle AMD$ и в ΔAMD $AD = MD$.

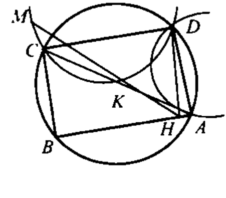
Но CD – биссектриса угла C, следовательно, $\smile AD = \smile DB$, откуда $AD = DB$. Таким образом, $MD = DB$ (2). Проведем $MK \perp AC$. Так как $\angle CKM = \angle EBD = 90°$, $\angle DEB = \angle DCB = \angle MCK$, то ΔCMK подобен ΔEDB, откуда $MC/MK = DE/DB$, $MC \cdot DB = $ $= MK \cdot DE$ (3). Из (1), (2) и (3)
$R^2 - d^2 = MK \cdot DE = r \cdot 2R$, откуда $d^2 = R^2 - 2Rr$.

895. По свойству средней линии треугольника $A_2B_3 \parallel CH$, $A_2B_3 = CH/2$, $A_3B_2 \parallel CH$, $A_3B_2 = $ $= CH/2$, $A_2B_2 \parallel AB$. Следовательно, $A_2B_3 \parallel A_3B_2$ и $A_2B_3 = A_3B_2$ и $A_2B_3A_3B_2$ – параллелограмм, а так как $CH \perp AB$, то и прямоугольник. Его диагонали A_2A_3 и B_2B_3 равны и делятся в точке M их пересечения пополам. Это относится аналогично и к

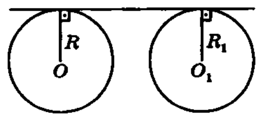


отрезкам A_2A_3 и C_2C_3. Поэтому окружность с центром M и радиусом MA_2 пройдет через точки A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3. На ней лежат также и точки A_1,B_1, C_1, например, поскольку A_1A_3 – ее диаметр и $\angle A_2A_1A_3 = 90°$, то (ср. № 884) точка A_1 лежит на этой окружности.

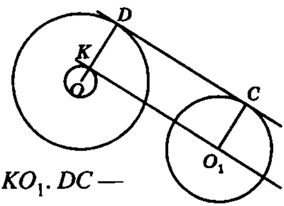
896. Пусть H, K, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые, содержащие стороны ΔABC. Так как $\angle K = \angle H = 90°$, то K и H ле-



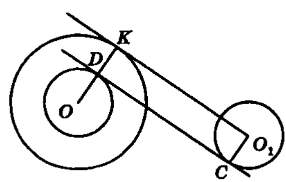
жат на окружности с диаметром AD, следовательно, $\angle ADH =$
$= \angle AKH$ (1). Аналогично K и M лежат на окружности с диаметром DC, следовательно, $\angle MDC = \angle MKC$ (2).
Во вписанном четырехугольнике ΔBCD $\angle ADC = 180° - \angle B$ (3), а в четырехугольнике $HBMD$
$\angle HDM = 360° - 90° - 90° - \angle B = 180° - \angle B$ (4). Из (3) и (4) $\angle ADC = \angle HDM$, значит, $\angle ADH = \angle MDC$. Тогда из (1) и (2) $\angle AKN = \angle MKC$, следовательно, точки H, K, M лежат на одной прямой.



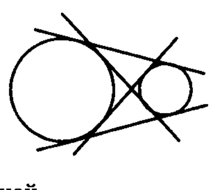
897. Возьмем две окружности. Пусть O и O_1 – их центры; R и R_1 – их радиусы. Окружности не пересекаются. Предположим, что $R = R_1$.



Пусть $R > R_1$. Проведем окружность с центром в точке O и радиуса $R - R_1$. O_1K – касательная к этой окружности. $OK \perp O_1K$.
Через точки O и O_1 проведем радиус OD (через точку K) и $O_1C \perp KO_1$. DC — касательная к двум данным окружностям.



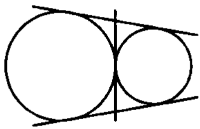
KD и CO_1 равны по построению и $KD \parallel CO_1$, т. к. $KD \perp KO_1$, $CO_1 \perp KO_1$. Четырехугольник $KDCO_1$ – параллелограмм, $\angle O_1 = 90°$. Значит, $KDCO_1$ – прямоугольник. DC – касательная к обеим окружностям (внешняя).

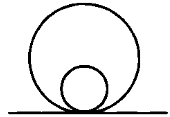


Построим внутреннюю касательную (центры окружностей лежат по разные стороны от касательной).
Сначала проводим окружность с центром в точке O радиусом $R + R_1$, затем аналогично построению внешней касательной.

У окружностей четыре общих касательных.

Если окружности имеют одну точку касания, то общих касательных у окружностей три или одна.

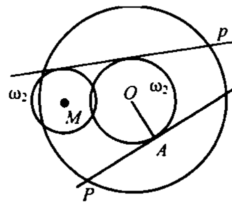




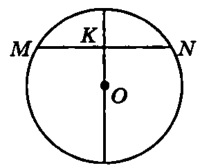
Если одна окружность целиком лежит в другой, то общих касательных у них нет.

Если окружности пересекаются (2 общие точки), то и касательных две.

898. Строим хорду $PQ = P_1Q_1$, проводим $OA \perp PQ$ и окружность ω_1 с центром O и радиусом OA. Строим окружность ω_2 с центром M и радиусом P_2Q_2. Общая касательная к ω_1 и ω_2 (№ 897) – искомая прямая p.



899. K – данная точка. MN – хорда, проходящая через точку K. $MK = a$; $KN = b$. Тогда $a \cdot b = c$ (из теоремы о произведении отрезков пересекающихся хорд). Отсюда получаем: $b = \dfrac{a}{c}$ и

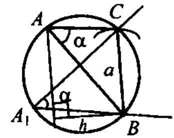


$$MN = a + b = a + \frac{c}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2\sqrt{c}\,.$$

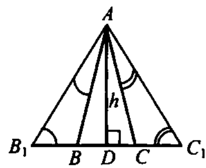
Если $\left(\sqrt{a} - \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right)^2 = 0$, то MN принимает минимальное значение, т. е. $a = \dfrac{c}{a} = b$.

Таким образом, чтобы построить через данную точку наименьшую хорду, надо провести через эту точку диаметр окружности, а затем линию перпендикулярную диаметру. Эта линия и будет наименьшей хордой.

900. **а)** Строим $\angle A_1$, равный данному углу α, проводим дугу с центром B на его стороне (взяв B достаточно близко к A_1) радиусом, равным данной стороне a; пусть C – точка пересечения этой дуги с другой стороной угла A_1. Около ΔA_1BC описываем окружность и проводим прямую, параллельную BC на расстоянии от нее, равном данной высоте h. Если A – точка пересечения этой прямой с окружностью, то ΔABC – искомый.

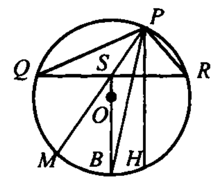


б) В искомом треугольнике ABC известны $\angle BAC = \alpha$, высота $AD = h$ и периметр $AB + BC + AC = 2p$. Если $B_1B = AB$, $C_1C = AC$, то $\angle B_1 = \angle B_1AB = \angle ABC/2$, $\angle C_1 = \angle C_1AC = \angle BCA/2$, $\angle B_1AC_1 = \angle B_1AB + \angle BAC + \angle CAC_1 -$ $- \angle BAC + (\angle B + \angle C/2) =$ $= \angle BAC + (180° - \angle BAQ/2) = 90° +$ $+ \alpha/2, B_1C_1 = B_1B + BC + C_1C =$ $= AB + BC + AC = 2p$.

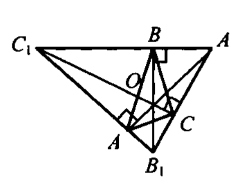


Сначала строим ΔAB_1C_1, зная $B_1C_1 = 2p$, $\angle B_1AC_1 = 90° + \alpha/2$, $AD = h$ (№ 900а), затем, откладывая от AB_1 и AC_1 углы, равные $\angle B_1$ и $\angle C_1$, получаем точки B и C.

901. Пусть ΔPQR – искомый, O – центр описанной окружности, P – упомянутая в условии вершина; тогда через B и O проходит серединный перпендикуляр стороны QR, пересекающий ее в точке S. Сначала проводим хорду $HP \parallel OB$, затем находим точку S пересечения PM и OB, тогда Q и R – точки пересечения с окружностью перпендикуляра к OB, проходящего через S.

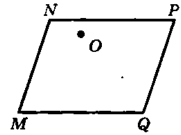


902. Согласно № 885 строим биссектрисы в данном ΔABC и через его вершины проводим к этим биссектрисам перпендикуляры, пересекающиеся в точках A_1, B_1, C_1. Четыре решения: $\Delta A_1B_1C_1$, ΔA_1OC_1, ΔB_1OC_1, ΔA_1OB_1, где O – точка пересечения биссектрис.



Задачи к главе IX

903. Решение приведено в учебнике.



904. $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Значит, стороны $MN \parallel PQ$ и данный четырехугольник – параллелограмм.

905. E_1 – середина стороны AB,

$\overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$; $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Отсюда

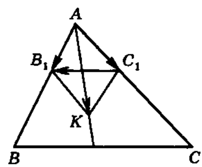
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$. Значит,

$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$. Получаем:

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ Таким образом, $EF \parallel GH$, значит $EFGH$ – параллелограмм.

906. $\overrightarrow{AB_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, $\overrightarrow{AC_1} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$.



AC_1KB_1 – параллелограмм. $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ – единичные векторы, т. е. AC_1KB_1 – ромб.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$, поэтому $\overrightarrow{AK}$ направлен вдоль диагонали ромба. поэтому вектор направлен вдоль биссектрисы $\angle BAC$.

$\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1}$ направлен вдоль другой диагонали ромба.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1}$ направлен вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A треугольника ABC, что и требовалось доказать.

907. а) Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Докажем, что существуют такие числа k, l и m, что $k + l + m = 0$ (1),

$k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (2). Так как $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны,

то существует такое число n, что $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$. Тогда (1) и (2) выполняются при $k = n - 1$, $l = 1$, $m = -n$: $(n - 1) + 1 + (-n) = 0$,

$(n-1)\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC} = n\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$

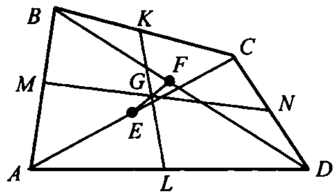
$= n\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

б) Пусть выполнены (1) и (2) и, например, $k\neq 0$. Тогда $m=-k-l$,

$k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}-(k+l)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, $k\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)+l\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\vec{0}$,

$k\overrightarrow{CA}+l\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{k}\overrightarrow{CB}$ точки A, B и C лежат на одной прямой.

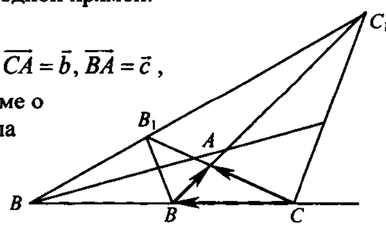
908. Пусть E и F – середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, G – точка пересечения средних линий MN и KL. Если G_1 – середина MN, G_2 – середина KL, O – произвольная точка, то



по задаче № 1 из параграфа 84 $\overrightarrow{OG_1}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)/2=$

$=\left[\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)/2\right]/2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)/4$, аналогично $\overrightarrow{OG_2}=\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}\right)/2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)/4$. Следовательно $\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}$. Так как $\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)/2$ и $\overrightarrow{OF}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)/2$, то $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}-2\overrightarrow{OG}=\vec{0}$, и согласно № 907 точки E и F и G лежат на одной прямой.

908. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $a>b>c$, $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$, $CB=a$, $CA_1=x$. По теореме о биссектрисе внешнего угла (№619) $CA_1/A_1B=AC/AB$, $x/(x-a)=b/c$, $x=ab/(b-c)$. Так как

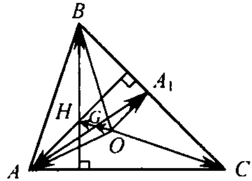


$\vec{a}/a$ – единичный вектор, то $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}(x/a)=\vec{a}\left[b/(b-c)\right]$ (1).

Аналогично $\overrightarrow{CB_1}=\vec{b}\left[a/(a-c)\right]$ (2), $BC_1=c\left[a/(a-b)\right]$. Тогда $\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\overrightarrow{BC_1}=\vec{a}+\left[a/(a-b)\right]\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-\left[b/(a-b)\right]\vec{a}+$

$=\left[a/(a-b)\right]\vec{b}$ (3).

Из (1), (2) и (3): $(b-c)\overrightarrow{CA_1}+(c-a)\overrightarrow{CB_1}+(a-b)\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, причем $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$. Согласно № 907 точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.



910. Если AA_1 – медиана, то $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GA_1}$, откуда $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}=-2\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OG}\right)$; согласно задаче 1 из параграфа 84 $\overrightarrow{OA_1}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)/2$ (1), поэтому $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}=-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+2\overrightarrow{OG}$,

следовательно, $\overrightarrow{OG}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)/3$ (2). Согласно (1) вектор $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ коллинеарен OA_1, а векторы $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{HA}$ и OA_1 коллинеарны как перпендикуляры к BC, поэтому эти векторы коллинеарны друг другу и отличаются лишь скалярным множителем: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=k\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)$ (3), аналогично $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=l\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}\right)$ (4). Вычитая (4) из (3), имеем:

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OH}-k\overrightarrow{OA}-l\overrightarrow{OH}+l\overrightarrow{OC}$,

$(k-l)\overrightarrow{OA}+(1-l)\overrightarrow{OC}+(l-k)\overrightarrow{OH}=\vec{0}$ при этом $(k-1)+(1-l)+(l-k)=0$, однако точки A, C и H не лежат на одной прямой, поэтому согласно № 907 $k-1=1-l=l-k=0$, откуда $k=l=1$ и (3) принимает вид $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$ или

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (5). Из (2) и (5):

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)/3=2\overrightarrow{GO}$ и, следовательно,

$HG/GO=2$.